TD 3 - SUITES

Exercice 1 ***(indications)***
Cette page donne des indications de plus en plus précises (et soulève aussi quelques risques d'erreurs).
Lorsque l'indication se termine par la mention « *à suivre...* », cela signifie que l'on peut trouver des indications plus précises au « niveau » suivant.

Indications de niveau 1.

1) On ne demande que sur $[0, 1]$, il ne faut donc pas faire sur $\mathbf{R}$ tout entier. *à suivre...*

2)(a) Pour la monotonie, il suffit d'étudier $x_{n+1} - x_n$ pour $n \in \mathbf{N}$.
Pour trouver un encadrement, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \in [0, 1]$ grâce à l'étude de la fonction. *à suivre...*

(b) La fonction f est continue sur $[0, 1]$. *à suivre...*

3)(a) (question plus difficile)
⚠ Il faut montrer une stricte positivité et non une positivité large (pas difficile, mais il faut le voir).
La relation est vraie pour $n = 0$ et pourtant la question demande de montrer pour $n \geqslant 1$, on peut y voir une indication cachée. *à suivre...*

(b) Théorème des gendarmes.

4)(a) Calculer $v_{n+1} - v_n$ et faire apparaître x_n^2, puis utiliser à la fois l'encadrement de x_n et la décroissance de la suite (x_n). *à suivre...*

(b) Croissante et majorée (grâce à la majoration de x_n).

(c) ⚠ il ne suffit pas d'un passage des inégalités à la limite. *à suivre...*

5)(a) Somme télescopique.

(b) ⚠ il ne faut pas faire apparaître de n dans l'expression (autrement qu'en indice), ni de x_{n+1}, v_{n+1}...

(c) Opérations sur les limites.

(d) (difficile)
Si $\ell \neq 1$, alors (w_n) ne converge pas vers 0 (on a montré que $\ell \neq 0$).
Montrer que la suite (S_n) ne converge pas en utilisant le fait que la suite harmonique diverge. *à suivre...*

Indications de niveau 2.

1) Ne pas perdre de temps à calculer la dérivée, c'est une fonction polynomiale d'ordre 2 dont les racines sont évidentes.

2)(a) $x_n^2 \geqslant 0$, donc la suite est décroissante. Rédiger une récurrence pour l'encadrement.

(b) La limite est un point fixe de f sur $[0, 1]$. *à suivre...*

3)(a) Avec une récurrence, utiliser les variations de la fonction. *à suivre...*

4)(a) $v_{n+1} - v_n = x_{n+1} - n x_n^2$. *à suivre...*

(b) Il faut montrer que $\ell > 0$ et pas seulement une inégalité large. *à suivre...*

5)(d) (w_n) ne converge pas vers 0, donc si on pose $\alpha = \dfrac{\ell(1-\ell)}{2}$, alors $\alpha > 0$ et il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $w_n \geqslant \alpha$ (à prouver avec la définition quantifiée de la limite *à suivre...*).
Donc pour $n \geqslant n_0$, $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \frac{w_k}{k} \geqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\alpha}{k}$. Ainsi $\displaystyle S_n \geqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\alpha}{k} + \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{w_k}{k} \geqslant \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{w_k - \alpha}{k}$
La deuxième somme est un nombre fixé (ne dépend pas de n) et la première diverge (suite hamonique).
Donc (S_n) diverge. C'est absurde.

Indications de niveau 3.

1) Le maximum se trouve au milieu entre les deux racines.

2)(b) Ça ne peut pas être 1 car $x_0 < 1$ et la suite est décroissante.

3)(a) La fonction f est décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
Elle conserve donc le sens des inégalités. *à suivre...*

4)(a) $n x_n \leqslant 1$, et $x_n \geqslant 0$, donc $n x_n^2 \leqslant x_n \leqslant x_{n+1}$. d'où le résultat.

(b) Cela vient simplement de la croissance de la suite (v_n).

5)(d) On pose $\varepsilon = \alpha$. alors pour $n \geqslant n_0$, $w_n \geqslant \ell(1-\ell) - \varepsilon = \alpha$.

Indications de niveau 4.

3)(a) Ainsi, l'hypothèse de récurrence permet d'écrire $x_{n+1} \leqslant f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ car $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Et il reste donc à montrer que $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+2}$, ce qui n'est pas très difficile.