Variables aléatoires sur un univers fini - TD

En autonomie.

Exercice 1 ***(indications)***
Partie 1 : Étude de la variable aléatoire X_n.

1)

2)(a)

(b) $X_2(\Omega) = [\![1, 2]\!]$. Si on connait $\mathbf{P}(X_2 = 1)$, on obtient donc directement l'autre probabilité.

(c) Commencer par calculer $\mathbf{P}(X_2 = 1)$ et $\mathbf{P}(X_3 = 3)$. La dernière valeur s'en déduit.

3)(a) On ne demande pas de montrer que toutes ces valeurs donnent des probabilités non nulles.

(b) À chaque fois, cela ne correspond qu'à une succession de tirages possible. Il faut déterminer laquelle.

(c) S'aider de la question **1)** et utiliser la famille complète d'événements associée à I_n.

(d) On applique la question précédente à n et $n - 1 \geqslant 2$. Pour la deuxième question, on pourra traiter à part les cas $(n \geqslant 2,\ j = 1)$, $(n = 2,\ j = 2)$ et $(n = 2,\ j \geqslant 3)$.

4)(a)

(b) En fonction de h_n obtenu avec une somme téléscopique.

5)(a)

(b) Montrer que X_n et S_n ont même loi par récurrence (même probabilité pour chaque valeur de k).

(c) Utiliser la linéarité de l'espérence.

Partie 2 : Étude de la variable aléatoire Y_n.

6)

7)

8)(a)

(b) Utiliser le système complet d'événements $([I_n \leqslant n - 1], [I_n = n])$.

(c) On somme l'égalité précédente jusqu'à $N = \frac{n(n+1)}{2}$, la valeur maximale prise par Y_n, on réalise quelles manipulations (changement d'indice...).

Partie 3

9)

10)(a) Formule des probabilités totales avec la famille complète d'événements assocée à I_n.

(b) Par récurrence (on sait déjà que ce sont des lois de Bernoulli).

11) C'est le nombre de boules tirées : X_n. On utilise la linéarité de l'espérance.

12) Il suffit de multiplier $Z_i^{(n)}$ par i pour avoir la valeur tirée et de sommer, pour avoir la somme des valeurs tirées.