Applications

1 Pour commencer

Exercice 1 (*)
Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes :

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbf{Z} & \to \mathbf{Z} \\ n & \mapsto -n \end{cases}$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbf{R} & \to [0,1] \\ x & \mapsto |\sin x| \end{cases}$
3. $f_3 : \begin{cases} \mathbf{N} & \to \mathbf{N} \\ n & \mapsto 2n \end{cases}$
4. $f_4 : \begin{cases} \mathbf{N} & \to \{-1,1\} \\ n & \mapsto (-1)^n \end{cases}$
5. $f_5 : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x, x+y, x-y) \end{cases}$
6. $f_6 : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (2x+3y, x+2y) \end{cases}$

Lorsque les applications sont bijectives, déterminer leur réciproque.

2 Lecture graphique

Exercice 2 (*)
Déterminer graphiquement
$\sin\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\right)$, et $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]\right)$.

Exercice 3 (*)
Représenter graphiquement les fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

$$a \;:\; x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 2-x & \text{si } x \geqslant 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{array} \right. .$$

$$b \;:\; x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 1+1/x & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{(-x)} & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right. .$$

Répondre aux questions suivantes en lisant sur les graphes des fonctions concernées :

1. Donner $a\,(]-\infty,0])$, $a\,([0,+\infty[)$.
2. Donner $b\,(]0,2])$, $b\,([1,+\infty[)$.
3. $a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est-elle surjective ? injective ?
   Déterminer deux intervalles I et J de $\mathbf{R}$ tels que $a : I \to J$ soit bijective.
4. $b : \mathbf{R} \to [0,+\infty[$ est-elle surjective ? injective ?
   Déterminer deux intervalles $I \subset \mathbf{R}$ et $J \subset [0,+\infty[$ tels que $b : I \to J$ soit bijective.

3 Images directes

Exercice 4 (**)

$$f \;:\; x \mapsto \sqrt{x^2+x-2}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer l'image de f, c'est-à-dire $f(\mathcal{D}_f)$.
3. L'application f est-elle injective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbf{R}$?

Exercice 5 (**)
Soit $f \;:\; x \mapsto \sqrt{|x-1|}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer l'image de f, c'est-à-dire $f(\mathcal{D}_f)$.
3. L'application f est-elle injective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbf{R}$?

Exercice 6 (**)
Soit la fonction

$$f \;:\; x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer $\mathrm{Im}\,(f) = f(\mathcal{D}_f)$.
3. L'application f est-elle injective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbf{R}$?
   Est-elle surjective entre ces mêmes ensembles ?

4 Bijectivité

Exercice 7 (*) (Bijection continue)
Soit I une partie de $\mathbf{R}$, $a \leqslant b$ sont deux points de I.
Soit $f : I \to \mathbf{R}$, on suppose que $f(a) \leqslant f(b)$.
Montrer à l'aide de contre-exemples que les hypothèses du théorème de la bijection continue sont *minimales* (on ne peut pas en supprimer).

Exercice 8 (*)
Soient

$$f \;:\; \begin{cases} \mathbf{R} & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x^2+1}-x \end{cases} \quad \text{et} \quad g \;:\; \begin{cases} \mathbf{R}^* & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1-x^2}{2x}. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x) > 0$.
2. Montrer que la composée $f \circ g$ est bien définie sur $\mathbf{R}^*$ et calculer $(f \circ g)\,(x)$ pour tout x non nul.
   Même question pour $g \circ f$.
3. Que peut-on en conclure ? *(on pourra utiliser la première question)*

Exercice 9 (*)
On considère l'application

$$h \,:\, x \;\mapsto \frac{2x+1}{x+2}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h.
2. Déterminer $\mathrm{Im}\,(h) = h(\mathcal{D}_h)$ et montrer que h est bijective de $\mathcal{D}_h$ dans $\mathrm{Im}\,(h)$.
   Donner son application réciproque.

Exercice 10 (**)
Pour chaque fonction,

- indiquer le domaine de définition,
- étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité dans $\mathbf{R}$.

1. $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{x^2}$.
2. $x \mapsto x \sin x$.
3. $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$.
4. $x \mapsto x\lfloor x \rfloor$.

Exercice 11 (**)
Pour $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$ avec $c \neq 0$, on définit

$$f\ :\ x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}.$$

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. À quelle(s) condition(s) nécessaires et suffisantes sur (a,b,c,d), l'application est-elle bijective de son domaine de définition sur son image.

   Dans ce cas, exprimer son image et l'application réciproque.

5 Incontournables

Exercice 12 (**) (applications circulaires réciproques)

1. (a) Montrer que la restriction de cos à $[0,\pi]$ admet une application réciproque arccos définie sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[0,\pi]$. Donner son domaine de dérivabilité et calculer sa dérivée.
   (b) Montrer de même, l'existence de arcsin : $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, donner son domaine de dérivabilité et calculer sa dérivée.
   (c) Montrer de même, l'existence de arctan : $\mathbf{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donner son domaine de dérivabilité et calculer sa dérivée.
2. Montrer que
$$\forall x \in [-1,1],\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$
3. Chercher une expression semblable pour
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{pour } x \neq 0.$$

Exercice 13 (**)
Montrer que la fonction

$$\mathrm{sh}\ : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans un intervalle J à préciser, et donner son application réciproque.

Exercice 14 (***)
Montrer que la fonction

$$\mathrm{sh}\ : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

induit une bijection de $\mathbf{R}_+$ dans un intervalle J à préciser, et donner son application réciproque.

6 Exercices abstraits

Exercice 15 (*)
Soient E et F deux ensembles non vides et f une injection de E dans F.
Montrer que f induit une injection de E dans $f(E)$.

Exercice 16 (**)
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Si $g \circ f$ est injective,
   (a) montrer que f est injective,
   (b) montrer à l'aide d'un contre-exemple que g n'est pas nécessairement injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective,
   (a) montrer que g est surjective,
   (b) montrer à l'aide d'un contre-exemple que f n'est pas nécessairement surjective.

Exercice 17 (***)
Soient E et F deux ensembles non vides. Montrer l'équivalence entre les deux assertions :

1. Il existe une injection de E dans F.
2. Il existe une surjection de F sur E.