Applications linéaires en dimension finie

1 Applications

Exercice 1 (Vrai-Faux)
Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (5x+2y, x-y) \end{array}\right.$.

2. $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, y) \end{array}\right.$.

3. $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+1, y, x+y) \end{array}\right.$.

4. $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, z) \end{array}\right.$.

5. $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,x,x,x) \end{array}\right.$.

6. $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) & \to & \mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \\ f & \mapsto & f'+5f \end{array}\right.$.

Exercice 2 (*)
Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-y)$.
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbf{R}^2$ et donner sa réciproque.

Exercice 3
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1. Montrer que la donnée $\begin{cases} \varphi(e_1) & = e_1 + e_2 \\ \varphi(e_2) & = e_1 - e_2 \\ \varphi(e_3) & = e_1 + \lambda e_3 \end{cases}$ définit un unique endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$.
2. Soit $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbf{R}^3$. Calculer $\varphi(x)$.
3. Quelle valeur donner à λ pour que φ soit injective ? soit surjective ?

2 Images et noyaux

Exercice 4 (*)
Donner l'image et le noyau de

1. $(x,y) \mapsto (x+3y, x-3y)$.
2. $(x,y) \mapsto (x, y, x+y)$.
3. $(x,y,z) \mapsto (x+y+2z, 2x-3y+z)$.
4. $(x,y,z) \mapsto (x-y+z, x+5y-z, 2x+2y+3z)$.
5. $(x,y,z) \mapsto (x-y-z+t, x+2y+z-t, 3x-z+t, 2x-y+t)$.

Exercice 5 (**)
Soient E, F, G trois espaces vectoriels,
$f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Interpréter la proposition « $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$ » avec $\operatorname{Im} f$ et $\ker g$.
2. Montrer que $f(\ker(g \circ f)) = \ker g \cap \operatorname{Im} f$.

3 Écriture matricielle

Exercice 6 (*)
Soit $M = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.
On note u_M l'application linéaire canoniquement associée à M *(dans les bases canoniques de* $\mathbf{R}^4$ *et* $\mathbf{R}^3$*)*.
Déterminer des bases de $\ker u_M$ et $\operatorname{Im} u_M$.

Exercice 7 (**)
Soit E un espace vectoriel de dimension n, et f un automorphisme de E. Montrer qu'il existe deux base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ telles que la matrice de f entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ soit la matrice identité de taille n.

Exercice 8 (**)
Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{R}^4$
Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbf{R}^4$ tel que

- $f(e_1) = e1 - e_2 + e_3$,
- $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$,
- $\ker f = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4,\ \text{tels que } x+2y+z=0 \text{ et } x+3y-t=0\}$.

Indication : on pourra chercher une base de $\ker f$.

Exercice 9 (**)
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $\phi : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{pmatrix}$.
Montrer que ϕ est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique (ordonnée par l'ordre lexicographique).
Préciser $\ker \phi$ et $\operatorname{Im} \phi$.