Fonctions usuelles

Toutes les études de fonction se font **sans calculatrice.**

1 Études qualitatives de fonctions

Exercice 1 (*) (Courbes)
Tracer les fonctions suivantes (sans calculatrice et avec le minimum de calculs) les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \ln(x-1)+2$
2. $x \mapsto \mathrm{e}^{|x|}$
3. $x \mapsto \frac{3x-2}{x-1}$
4. $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Exercice 2 (*) (Symétries)
Les fonctions suivantes sont-elles paires ? impaires ? périodiques ? de quelle période ? symétriques par rapport à un point ? à un axe ?

1. $x \mapsto \ln(|x|)$
2. $x \mapsto \frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$
3. $x \mapsto \sin\left(x^2\right)$
4. $x \mapsto \sin\left(\frac{x+1}{2}\right)$
5. $x \mapsto -x\,\mathrm{e}^{x^2-3}$
6. $x \mapsto \mathrm{e}^{(x-3)^2+1}$
7. $x \mapsto -\ln|(x+1)(x+2)|$
8. $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+4}$

Exercice 3 (**)
Soient f, g deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$, croissantes.

1. Montrer que $f+g$ est croissante.
2. Si f et g sont positives,
   que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$?
3. Si f et g sont négatives,
   que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$?
4. Dans le cas général,
   que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$?

2 Composition

Exercice 4 (*)
On considère les applications

$$f \,:\, x \mapsto x^2+1 \quad \text{et} \quad g \,:\, x \mapsto \ln x.$$

Déterminer les domaines de définition et les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 5 (*)
On considère les applications

$$f \,:\, x \mapsto \frac{2x+1}{x-2} \quad \text{et} \quad g \,:\, x \mapsto x^2$$

1. Donner les ensembles de définition de f et g.
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.
3. Calculer l'image de $3x$ par f et l'image de x^3 par g.

3 Dérivées

Exercice 6 (*)
Déterminer les domaines de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$
2. $x \mapsto \mathrm{e}^{(x^2)}$
3. $x \mapsto \mathrm{e}^{2x+1}$
4. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
5. $x \mapsto \ln|x|$
6. $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$

Exercice 7 (**)
Déterminer les domaines de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \ln\left|x^2-3x+2\right|$
2. $x \mapsto \sqrt{\tan x}$
3. $x \mapsto \ln^2(x+1)$
4. $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$

Exercice 8 (**)
Déterminer les domaines de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \sin^3(x)$
2. $x \mapsto \sqrt{\ln\left(x^2-x+1\right)}$
3. $x \mapsto \sqrt{\ln\left|x^2-x-1\right|}$

4 Limites et branches asymptotiques

Exercice 9
Étudier les branches asymptotiques en $+\infty$:

1. $x \mapsto \sqrt{x^2-2x+4}$.
2. $x \mapsto \sqrt{x^3-2x^2+4}$.
3. $x \mapsto \sqrt{x+4}-\sqrt{x}$.
4. $x \mapsto \sqrt{x+4}-\sqrt{x-2}$.
5. $x \mapsto \sqrt{2x+4}-\sqrt{x-2}$.
6. $x \mapsto \sqrt{x^2+4}-\sqrt{x}$.
7. $x \mapsto \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$.
8. $x \mapsto \ln\left(x^2+1\right)$.
9. $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+1}-\mathrm{e}^{x^2}$.
10. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln(x)}$.
11. $x \mapsto \ln\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x\right)$. (en $+\infty$ et en 0).

5 Études complètes

Exercice 10 (*) (baccalauréat 1962)
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction

$$f : x \mapsto 2\,(1-\cos x)\,\sin^2(x).$$

Exercice 11 (**)
Étude complète de la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x}.$$

Exercice 12 (**)
Études complètes des fonctions de l'exercice 7.

Exercice 13 (**)
Étude complète de la fonction

$$x \mapsto \ln \left| x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \right| .$$

Exercice 14 (**) (baccalauréat 1962)
Étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 - 2x + 2}.$$

En déduire le *nombre d'extrémités d'arcs*[1] u solutions de

$$(E) \ : \quad (1-m)\sin^2 u - 2(m+1)\cos u + 3m + 4 = 0.$$

On posera $\cos u = x$ et l'on discutera suivant les valeurs du paramètre m.

6 Approfondissement

Exercice 15 (**)
On définit les fonctions

$$f \ : \ x \mapsto (2x-1)^2 \quad \text{et} \quad g \ : \ x \mapsto \sup_{x \leqslant t \leqslant x+1} f(t).$$

Étudier g.

Exercice 16 (***)

1. Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbf{R}$ du nombre de solutions de l'équation

$$(E_a) \quad x^a = \ln(x).$$

2. Tracer dans un même repère la courbe représentative de $x \mapsto \ln x$ et celle de la fonction $x \mapsto x^{a_0}$ où a_0 est l'unique réel strictement positif tel que l'ensemble des solutions de E_{a_0} soit un singleton.

1. Le nombre de $u \in [0, \pi]$ qui sont solution de l'équation.