SUJETS NATIONAUX

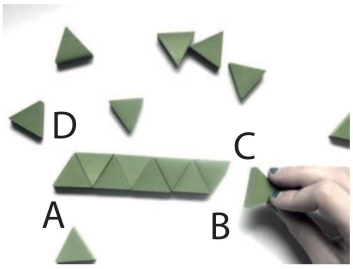
Premier exercice

Toutes séries

Défi entre sœurs

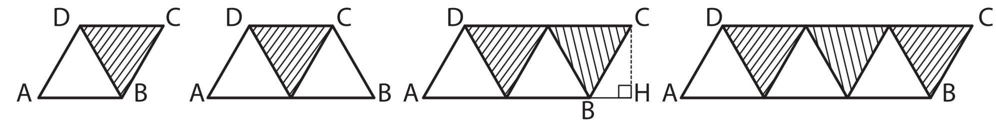
Énoncé

Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre. Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la valeur exacte des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus. Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :
ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
$L = AC$ la longueur de la diagonale [AC] ;
$\ell = BD$ la longueur de la diagonale [BD].



Partie A

1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.
2. Calculer les longueurs L et ℓ pour les cas suivants :



Deux triangles *Trois triangles* *Quatre triangles* *Six triangles*

Partie B

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre le calcul des diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier égal ou supérieur à 2) et se met à chercher.

1. Lorsque le nombre de triangles est **pair**, montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$,où $p = \dfrac{n}{2}$.
2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs ℓ et L ?
3. Cémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs ℓ et L calculées par Léa.

Partie C

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :
1re propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair »
2e propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposé, L est la racine carrée d'un nombre premier »
On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.

2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?
3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2\ 015}$?
4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\ 015\ 057}$. Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.
5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi ? (détailler la démarche). Si oui, le démontrer.