Couples et vecteurs de variables aléatoires

1 Mises en situation

Exercice 1 (*)
On lance deux dés, X est le résultat du premier, Y est le maximum des deux.
Voici deux façons de déterminer la loi de Y :

1. Déterminer $P(Y \leqslant k)$ pour $k \in [\![1;6]\!]$.
   En déduire la loi de Y.
2. Déterminer la loi de (X, Y). En déduire la loi de Y.
3. Donner la loi de Y sachant $X = 2$.

Exercice 2 (**)
Dans une urne qui contient n jetons numérotés de 1 à n, on tire successivement (sans remise) deux jetons. On note X_1 le premier numéro, et X_2 le second numéro.

1. (a) Décrire l'univers image du couple (X_1, X_2).
   (b) Donner la loi du couple (X_1, X_2).
   (c) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X_1, X_2)$.
   (d) Les variables aléatoires sont-elles indépendantes.
2. On note $X = \min(X_1, X_2)$ et $Y = \max(X_1, X_2)$.
   (a) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   (b) Donner l'univers du couple (X, Y).
   (c) Déterminer la loi conjointe de (X, Y). Vérifier que l'on retrouve bien les lois marginales à partir de la loi conjointe.
3. On pose $Z = Y - X$.
   (a) Déterminer l'univers image de Z.
   (b) Déterminer la loi de Z.

Exercice 3 (*)
Un avion transporte 230 passagers et leurs bagages. Il pèse 190 tonnes sans passagers ni bagages mais avec l'équipage et plein de carburant.
Les consignes de sécurité interdisent le décollage si le poids de l'appareil dépasse 220 tonnes. Les 230 places ont été réservées et on sait que le poids d'un passager suit une loi d'espérance 68kg et d'écart type 10kg.
On admet que le poids des bagages suit une loi d'espérance égale à 18kg et d'écart type 7kg et que ces variables sont indépendantes.

1. X est la variable aléatoire égale au poids de l'appareil lors du décollage, calculer $\mathbf{E}(X)$ et σ_X.
2. Déterminer un majorant de la probabilité que l'appareil n'ait pas l'autorisation de décoller.

Exercice 4 (**)
Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n.
Une urne U_2 contient des boules dont une proportion p de boules rouges.
On tire au hasard une boule dans U_1 et on note X la variable aléatoire égale au numéro tiré.
On tire ensuite, autant de boules dans l'urne U_2 (avec remise) que le numéro obtenu pour X. On note Y le nombre total de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de Y sachant $[X = k]$.
3. Déterminer la loi du couple (X, Y).
4. Que vaut la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$?

Exercice 5 (**)
On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte.
Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Donner la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.
3. Donner la loi de Y et son espérance.
4. Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

Exercice 6 (***)
Un centre d'appels effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts dont chacun décroche avec la probabilité p.

1. On note N_1 le nombre de correspondants qui ont décroché. Quelle est la loi de N_1 ?
2. L'employé rappelle un peu plus tard les $n - N_1$ correspondants qui n'ont pas décroché au premier appel. On note N_2 le nombre de correspondants qui ont décroché et $N = N_1 + N_2$ Quelle est la loi de N ?
   On suppose que la probabilité de décrocher au deuxième appel est également p.
   Indication : On doit trouver une loi binomiale dont il faut exprimer le paramètre en fonction de p.

2 Exercices théoriques

Exercice 7 (*)
Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Donner l'espérance de leur somme.
2. Donner l'espérance de leur minimum.

Exercice 8 (*)
Soit X dont la loi est donnée par $\mathbf{P}(X=0)=1/6$, $\mathbf{P}(X=1)=\mathbf{P}(X=-1)=1/4$ et $\mathbf{P}(X=2)=P(X=-2)=\frac{1}{6}$.
On pose $Y=X^2$.

1. Donner la loi du couple (X,Y). En déduire la loi de Y.
2. Calculer $\mathbf{Cov}\,(X,Y)$.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 (**)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et X une variable aléatoire qui suite une loi uniforme sur $[1,n]\!]$. On pose $Y=(X+1)^2$.
Calculer $\mathbf{Cov}(X,Y)$.

Exercice 10 (**)
Soient X et Y deux variables aléatoires qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2.

1. Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $[X=1]$ et $[Y=1]$ sont indépendants.
2. En déduire que les variables sont indépendantes si, et seulement si elles sont décorrélées.

Exercice 11 (**) (classique)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
On considère une suite $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
On pose $X=\min\limits_{i\in[\![1,n]\!]}(X_i)$ et $Y=\max\limits_{i\in[\![1,n]\!]}(X_i)$ et

1. S'il existe $p\in]0,1[$ tel que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
   (a) Déterminer les lois de X et de Y.
   (b) Donner les espérances $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.
2. S'il existe $N\geqslant 2$ tel que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $X_i\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1,N]\!])$ (la loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$),
   (a) Déterminer les lois de X et de Y.
   (b) Montrer que X et $N+1-Y$ suivent la même loi. En déduire l'espérance de $X+Y$.

Exercice 12 (**)
Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p et indépendantes.

1. Soit $Y_n=X_nX_{n+1}$, déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2. Calculer $\mathbf{Cov}(Y_i,Y_j)$.

Exercice 13 (**)
Soit $n\in\mathbf{N}^*$, Soit $n\in\mathbf{N}^*$, $(Y_i)_{i\in[1,n]}$, une suite de variables aléatoires finies discrètes (quelconques).
Montrer que

$$\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{Cov}(Y_i,Y_j).$$

Exercice 14 (**)
Soient $0<p<1$ et $q=1-p$.
$(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.
Pour $k\in[\![1,n]\!]$, on note $Y_k=X_k+X_{k+1}$.

1. Calculer pour $k\in[\![1;n]\!]$, $\mathbf{Cov}(Y_k,Y_{k+1})$
2. Montrer que $0<\mathbf{Cov}(Y_k,Y_{k+1})\leqslant\frac{1}{4}$
3. Calculer pour tout $1\leqslant k<l\leqslant n$, $\mathbf{Cov}(Y_k,Y_l)$
4. (***) Soit $\epsilon>0$ fixé, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k-2p\right|>\epsilon\right)=0.$$

Exercice 15 (**)
Soit X une variable aléatoire d'espérance m et de variance σ inconnues. On dispose d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, mutuellement indépendantes et toutes de même loi que X.
Pour θ un paramètre lié à la loi X (par exemple son espérance ou sa variance), on dit qu'une variables aléatoire θ_n obtenue à partir de $X_1,X_2,\cdots X_n$ est un *estimateur sans biais* de θ si, $\mathbf{E}\,(\theta_n)=\mathbf{E}\,(\theta)$.

1. On pose $M_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$.
   Montrer que M_n est un estimateur sans biais de l'espérance de X.
2. On pose $T_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)^2$.
   Montrer que T_n est un estimateur sans biais de la variance $\mathbf{V}(X)$.
3. (***) On pose $\widetilde{T_n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-M_n)^2$.
   Montrer que $\widetilde{T_n}$ est un estimateur de $\mathbf{V}(X)$ avec biais, et en déduire un estimateur sans biais simple de $\mathbf{V}(X)$ qui n'utilise pas la valeur de m.

Exercice 16 (***)

1. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,+1\}$. Montrer la propriété suivante : Pour tout triplet $(a,b,c)\in\{-1,+1\}^3$,
$\mathbf{P}_{[Y=b]}\,(X=a\cap Z=c)$=$\mathbf{P}_{[Y=b]}\,(X=a)\,\mathbf{P}_{[Y=b]}\,(Z=c)$
2. Comment construire un triplet (X,Y,Z) de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,+1\}$, *non indépendantes*, telle que la propriété soit satisfaite avec
$$\mathbf{P}\,(X=a \text{ et } Y=b \text{ et } Z=c)>0$$
   pour tout triplet $(a,b,c)\in\{-1,+1\}^3$?
   Indication : On pourra par exemple choisir la même expression pour les lois conditionnelles de X sachant $Y=b$ et de Z sachant $Y=b$.