Couples et vecteurs de variables aléatoires

1 Mises en situation

Exercice 1 (*)
On lance deux dés, X est le résultat du premier, Y est le maximum des deux.
Voici deux façons de déterminer la loi de Y :

1. Déterminer $\mathbf{P}(Y \leqslant k)$ pour $k \in [\![1;6]\!]$.
   En déduire la loi de Y.
2. Déterminer la loi de (X,Y). En déduire la loi de Y.
3. Donner la loi de Y sachant $X=2$.

Exercice 2 (**)
Dans une urne qui contient n jetons numérotés de 1 à n, on tire successivement (sans remise) deux jetons. On note X_1 le premier numéro, et X_2 le second numéro.

1. (a) Décrire l'univers image du couple (X_1,X_2).
   (b) Donner la loi du couple (X_1,X_2).
   (c) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X_1,X_2)$.
   (d) Les variables aléatoires sont-elles indépendantes.
2. On note $X=\min(X_1,X_2)$ et $Y=\max(X_1,X_2)$.
   (a) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   (b) Donner l'univers du couple (X,Y).
   (c) Déterminer la loi conjointe de (X,Y). Vérifier que l'on retrouve bien les lois marginales à partir de la loi conjointe.
3. On pose $Z=Y-X$.
   (a) Déterminer l'univers image de Z.
   (b) Déterminer la loi de Z.

Exercice 3 (*)
Un avion transporte 230 passagers et leurs bagages. Il pèse 190 tonnes sans passagers ni bagages mais avec l'équipage et plein de carburant.
Les consignes de sécurité interdisent le décollage si le poids de l'appareil dépasse 220 tonnes. Les 230 places ont été réservées et on sait que le poids d'un passager suit une loi d'espérance 68kg et d'écart type 10kg.
On admet que le poids des bagages suit une loi d'espérance égale à 18kg et d'écart type 7kg et que ces variables sont indépendantes.

1. X est la variable aléatoire égale au poids de l'appareil lors du décollage, calculer $\mathbf{E}(X)$ et σ_X.
2. Déterminer un majorant de la probabilité que l'appareil n'ait pas l'autorisation de décoller.

Exercice 4 (*)
Un garagiste dispose de deux voitures de location.
La probabilité d'être disponible le jour considéré est de 4/5 pour chacune d'entre elles, indépendamment de l'autre. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X, la variable aléatoire égale au nombre de client qui se présentent un jour donné pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$ avec

$$\mathbf{P}(X=0)=0,1, \quad \mathbf{P}(X=1)=0,3,$$

$$\mathbf{P}(X=2)=0,4, \quad \mathbf{P}(X=3)=0,2.$$

On note Z le nombre de voitures disponibles ce jour-là et et Y le nombre de clients satisfaits ce jour (obtenant une voiture). On considère que X et Z sont indépendantes.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Déterminer la marge brute moyenne que le garagiste peut espérer.

Exercice 5 (*)
Une urne contient exactement $b \geqslant 1$ boules blanches et $r \geqslant 1$ boules rouges.
On tire n boules avec remise. On note B le nombre de boules blanches et R le nombre de boules rouges obtenues lors des tirages.

1. Donner les univers images de B et R.
2. Donner les lois de B et R, puis celle de $N=B+R$.
3. B et R sont-elles indépendantes ?
4. Donner, sans calcul, le coefficient de corrélation de B et R. En déduire la covariance $\mathbf{Cov}(B,R)$.

Exercice 6 (**)
Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n.
Une urne U_2 contient des boules dont une proportion p de boules rouges.
On tire au hasard une boule dans U_1 et on note X la variable aléatoire égale au numéro tiré.
On tire ensuite, autant de boules dans l'urne U_2 (avec remise) que le numéro obtenu pour X. On note Y le nombre total de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de Y sachant $[X=k]$.
3. Déterminer la loi du couple (X,Y).
4. Que vaut la covariance $\mathbf{Cov}(X,Y)$?

Exercice 7 (**)
On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Donner la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.
3. Donner la loi de Y et son espérance.
4. Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

Exercice 8 (**)
Dans un jeu, on dispose d'une urne avec n boules numérotées de 1 à n. Un joueur A tire successivement et avec remise deux numéros. On note X le plus grand des deux.
Ensuite, un joueur B tire un seul numéro dans la même urne et le note Y. Si $Y \geqslant X$, alors B gagne, sinon A gagne. Trouver la valeur de n à partir de laquelle il est intéressant d'être dans la position de A, plutôt que B.
On pourra utiliser une calculatrice.

Exercice 9 (**)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
Dans une urne contenant initialement n boules numérotées de 1 à n, on effectue deux tirages successifs d'une boule de la façon suivante : si on note k le numéro de la boule obtenue au premier tirage, on remet celle-ci dans l'urne et on rajoute k autres boules supplémentaires portant également le numéro k. Ainsi, l'urne contient $k+1$ boules avec le numéro k. On effectue alors un deuxième tirage.
On note X_1 et X_2 les numéros obtenus respectivement au premier et au second tirage.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de X_2 et montrer que son espérance vérifie :
$$\mathbf{E}(X_2) = \frac{1-n}{2} + \frac{3n-1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Exercice 10 (**)
On dispose de deux pièces d'apparence identique. La pièce A donne Pile avec la probabilité $a \in]0, 1[$ et le pièce B donne Pile avec la probabilité $b \in]0, 1[$.
Pour le premier lancer, on choisit une pièce au hasard et pour les coups suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient Pile, on garde la même pièce pour le lancer suivant, et si on obtient Face, on change de pièce pour le lancer suivant.
Pour $k \geqslant 1$, on note :
$A_k = 1$ si le k-ième lancer se fait avec la pièce A, 0 sinon.
$E_k = 1$ si le k-ième lancer amène Pile, 0 sinon.

1. Trouver une relation entre les espérances $\mathbf{E}(E_k)$ et $\mathbf{E}(A_k)$.
2. Trouver une relation entre $\mathbf{E}(A_{k+1})$ et $\mathbf{E}(A_k)$
3. En déduire $\mathbf{E}(A_k)$ puis $\mathbf{E}(E_k)$.

Exercice 11 (***)
Un centre d'appels effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts dont chacun décroche avec la probabilité p.

1. On note N_1 le nombre de correspondants qui ont décroché. Quelle est la loi de N_1 ?
2. L'employé rappelle un peu plus tard les $n - N_1$ correspondants qui n'ont pas décroché au premier appel. On note N_2 le nombre de correspondants qui ont décroché et $N = N_1 + N_2$ Quelle est la loi de N ?
On suppose que la probabilité de décrocher au deuxième appel est également p.
Indication : On doit trouver une loi binomiale dont il faut exprimer le paramètre en fonction de p.
3. Comment peut-on trouver le résultat précédent sans calculs (si vous ne l'avez pas déjà vu) ?

Exercice 12 (***)
Avec un peu de dénombrement...
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On tire n boules sans remise dans une urne qui en contient n blanches et n noires. Les boules blanches sont numérotées de 1 à n.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la boule k est obtenue au cours des k tirages, et 0 sinon.

1. Donner la loi de X_k.
2. Soit Y la loi égale au nombre de points obtenus en ajoutant les numéros des boules blanches tirées. Calculer $\mathbf{E}(Y)$.

2 Exercices théoriques

Exercice 13 (*)
Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Donner l'espérance de leur somme.
2. Donner l'espérance de leur minimum.

Exercice 14 (**)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $Y = (X+1)^2$.
Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

Exercice 15 (**)
Soient X et Y deux variables aléatoires qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2.

1. Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $[X = 1]$ et $[Y = 1]$ sont indépendants.
2. En déduire que les variables sont indépendantes si, et seulement si elles sont décorrélées.

Exercice 16 (**) (classique)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
On considère une suite $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
On pose $X = \min\limits_{i\in[\![1,n]\!]} (X_i)$ et $Y = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} (X_i)$ et

1. S'il existe $p \in]0,1[$ tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
   (a) Déterminer les lois de X et de Y.
   (b) Donner les espérances $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.
2. S'il existe $N \geqslant 2$ tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,N]\!])$ (la loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$),
   (a) Déterminer les lois de X et de Y.
   (b) Montrer que X et $N+1-Y$ suivent la même loi. En déduire l'espérance de $X+Y$.

Exercice 17 (**)
Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p et indépendantes.

1. Soit $Y_n = X_n X_{n+1}$, déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2. Calculer $\mathbf{Cov}(Y_i, Y_j)$.

Exercice 18 (*)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $(Y_i)_{i\in[1,n]}$, une suite de variables aléatoires finies discrètes (quelconques).
Montrer que

$$\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{Cov}(Y_i, Y_j).$$

Exercice 19 (**)
Soient $0 < p < 1$ et $q = 1-p$.
$(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.
Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1. Calculer pour $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbf{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$.
2. Montrer que $0 < \mathbf{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) \leqslant \frac{1}{4}$.
3. Calculer pour tout $1 \leqslant k < \ell \leqslant n$, $\mathbf{Cov}(Y_k, Y_\ell)$.
4. (***) Soit $\epsilon > 0$ fixé, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - 2p\Big| > \epsilon\right) = 0.$$

Exercice 20 (**)
Soit X une variable aléatoire d'espérance m et de variance σ inconnues. On dispose d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, mutuellement indépendantes et toutes de même loi que X.
Pour θ un paramètre lié à la loi X (par exemple son espérance ou sa variance), on dit qu'une variables aléatoire θ_n obtenue à partir de $X_1, X_2, \cdots X_n$ est un *estimateur sans biais* de θ si, $\mathbf{E}(\theta_n) = \theta$.

1. On pose $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   Montrer que M_n est un estimateur sans biais de l'espérance de X.
2. On pose $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - m)^2$.
   Montrer que T_n est un estimateur sans biais de la variance $\mathbf{V}(X)$.
3. (***) On pose $\widetilde{T_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - M_n)^2$.
   Montrer que $\widetilde{T_n}$ est un estimateur de $\mathbf{V}(X)$ avec biais, et en déduire un estimateur sans biais simple de $\mathbf{V}(X)$ qui n'utilise pas la valeur de m.

Exercice 21 (***)

1. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,+1\}$. Montrer la propriété suivante : Pour tout triplet $(a,b,c) \in \{-1,+1\}^3$,
$\mathbf{P}_{[Y=b]}(X = a \cap Z = c) = \mathbf{P}_{[Y=b]}(X = a)\,\mathbf{P}_{[Y=b]}(Z = c)$.
2. Comment construire un triplet (X,Y,Z) de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,+1\}$, *non indépendantes*, telle que la propriété ci-dessus soit satisfaite avec
$$\mathbf{P}(X = a \text{ et } Y = b \text{ et } Z = c) > 0$$
   pour tout triplet $(a,b,c) \in \{-1,+1\}^3$?
   Indication : On pourra par exemple choisir la même expression pour les lois conditionnelles de X sachant $Y = b$ et de Z sachant $Y = b$.

Exercice 22 (***)
Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'est pas possible de truquer deux dés indépendants de façon à ce que la somme des points obtenus en les lançant indépendamment suive une loi uniforme sur l'ensemble $\{2,3,\cdots,12\}$.

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1,2,\cdots,6\}$.
Pour tout $1 \leqslant i \leqslant 6$, on pose $u_i = \mathbf{P}(U = i)$ et $v_i = \mathbf{P}(V = i)$.

1. Si U et V suivent une loi uniforme sur $\{1,2,\cdots,6\}$, est-ce que $S = U+V$ suit la loi uniforme sur $\{2,3,\cdots,12\}$?
   Dans la suite, on note $S = U+V$ et on suppose que S suit une loi uniforme sur $\{2,\cdots,12\}$.
2. Montrer que $P(x) = \mathbf{E}\left(x^S\right)$ est un polynôme que l'on explicitera.
3. Démontrer que $\mathbf{E}\left(x^S\right) = \mathbf{E}\left(x^U\right)\cdot\mathbf{E}\left(x^V\right)$.
4. Démontrer qu'un polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.
5. Aboutir à une contradiction.