DÉNOMBREMENT

1 POUR COMMENCER

Exercice 1 (*)

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot

- 1) BONHEUR 2) TRAVAIL 3) ANAGRAMME

Exercice 2 (*)

Une urne contient 5 boules numérotées.

Combien y-a-t-il de tirages possibles dans chaque situation :

- 1) on tire 3 boules simultanément,
- 2) on tire 3 boules successivement avec remise,
- 3) on tire 3 boules successivement sans remise.

Exercice 3 (**) (méthode)

L'alphabet est composé de 6 voyelles et 20 consonnes.

- 1) Déterminer le nombre de mots distincts composés de 3 consonnes et 2 voyelles.
- 2) Faire de même en excluant les mots qui renferment 3 consonnes côte à côte.

Exercice 4 (*)

Combien utilise-t-on de chiffres 1 pour compter de 1 à 10 000 ?

Exercice 5 (**)

Soit $b \geq 2$. Combien faut-il de caractères pour écrire 10 000 en base b ?

Par exemple, il en faut 5 en base 10.

2 AU PLUS, AU MOINS...

Exercice 6 (*)

Combien y-a-t-il de nombres à 5 chiffres (on ne met pas de 0 en premier chiffre)

- 1) au total
- 2) où 0 ne figure jamais.
- 3) où 0 figure une et une seule fois.
- 4) où 0 figure au plus une fois.
- 5) où 0 figure au moins une fois.

Exercice 7 (**)

Soit un jeu de 52 cartes, dont on tire 5 cartes. Dénombrer les mains

- 1) au total.
- 2) comprenant exactement un as.
- 3) comprenant au moins un valet.
- 4) comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame.

3 INJECTIONS

Exercice 8 (**) (méthode)

Un magasin propose des billes de 5 couleurs différentes. Donner le nombre de façons de remplir un sac avec 20 billes.

Méthode :

On choisit un ordre pour les 5 couleurs : $RBVOJ$.

On écrit les couleurs des billes les unes à la suite des autres, rassemblées par couleur suivant l'ordre prédéfini et on sépare chaque couleur d'une autre par un trait.

Par exemple $RR - BBBBBB - V - -JJJJJJJJJJ$ (ici, la couleur O n'a jamais été choisie). On compte le nombre d'écritures possibles.

Exercice 9 (**)

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, donner le nombre de solutions de l'équation $(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$ de $x + y + z + t = n$.

Exercice 10 (***)

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, avec $p \leq n$.

- 1) Donner le nombre d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- 2) Donner le nombre d'applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

4 PARTIES D'UN ENSEMBLE

Exercice 11 () (Formule du capitaine)**

- 1) Montrer, par un raisonnement de dénombrement, que pour tout $n \geq 1$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

On pourra considérer des équipes de k joueurs dont un capitaine à constituer parmi un vivier de n candidats.

- 2) Généraliser la formule précédente en montrant, toujours par un raisonnement de dénombrement

$$\binom{p}{k} \binom{n}{p} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}.$$

On pourra aussi vérifier la formule par le calcul.

Exercice 12 ()**

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note P_n le nombre maximum de régions en lesquelles on peut séparer le plan avec n droites distinctes.

- 1) Donner une relation de récurrence linéaire (à coefficients non constants) vérifiée par la suite (P_n) . *On ne demande pas la justification formelle pour obtenir géométriquement le bon nombre de régions.*
- 2) Donner la valeur de P_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 13 (*)**

- 1) Si $\text{Card}(E) = n$, combien peut-on définir de relations binaires sur E ?
- 2) Parmi celles-ci, combien sont
- Réflexives ?
 - Symétriques ?
 - Réflexives et symétriques ?

Exercice 14 (*)**

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

- 1) Combien existe-t-il de couples (A, B) formant une partition de E en deux parties ?
- 2) Combien existe-t-il de couples (A, B) formant un recouvrements de E en deux parties (ie de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \cup B = E$) ?

5 ENTRAÎNEMENT

Exercice 15 ()**

Soit un tableau de 9 cases de long par 4 cases de haut. On se déplace le long des arêtes uniquement vers le bas ou vers la droite.

- 1) Combien y a-t-il de chemins possibles pour aller du coin en haut à gauche au coin en bas à droite.
- 2) Si on place un point C sur le quadrillage, combien de ces chemins passent par C ?
- 3) Retrouver la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

Exercice 16 ()**

Dans le développement de $(a + b + c)^{2000}$,

- 1) quel est le coefficient devant $a^{1000}b^{996}c^4$?
- 2) quel est le coefficient devant $a^{1980}b^{15}c^3$?

Exercice 17 (*)**

De combien de façons peut-on payer 100€ avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes.

Exercice 18 (*)**

- 1) Soient A, B, C trois ensembles finis.
Déterminer une formule du crible pour $\text{Card}(A \cup B \cup C)$.
- 2) Pour $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, n ensembles finis.
Déterminer la formule du crible pour $\text{Card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)$. On pourra faire intervenir la notation $I_k(n)$ pour désigner l'ensemble des parties à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
On pourra la démontrer par récurrence.
- 3) Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\sigma(n)$ les permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
Un dérangement de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est une permutation $s \in \sigma(n)$ sans point fixe, c'est-à-dire telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, s(i) \neq i$.
On note D_n l'ensemble des dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $d_n = \text{Card } D_n$.
Par convention, on pose $d_0 = 1$.
 - (a) Calculer d_1, d_2 .
 - (b) Montrer que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$.
 - (c) En considérant le complémentaire de D_n dans $\sigma(n)$, montrer que

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

6 EXERCICES CCINP**Exercice 19 (CCINP 112)**

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

- 1) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
- 2) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
- 3) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.