

DÉRIVABILITÉ

1 CALCUL

Exercice 1 ()**

Sur quelle(s) partie(s) de \mathbf{R} , les applications suivantes sont-elles continues ? dérivables ?

Calculer leur dérivée.

Dans le cas d'une prolongement possible par continuité, étudier la dérivabilité de la fonction prolongée, éventuellement son caractère \mathcal{C}^1 .

1. $f : x \mapsto 2^{x^2+1}$
2. $f : x \mapsto x|x|$
3. $f : x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$
4. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$
5. $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$
6. $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x-1} + 1)$
7. $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{|x|}} \sin \frac{1}{x}$
8. $f : x \mapsto (x+1)^{\cos x}$
9. $f : x \mapsto (\sqrt{x} + 1)^{\ln x}$
10. (***) $f : x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^{-x}$

Exercice 2 ()**

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x > 0$

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

Exercice 3 ()**

En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right).$$

Exercice 4 ()**

Soit $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Montrer que f peut être prolongeable en une application continue sur \mathbf{R} .
On travaillera désormais avec l'application prolongée.
2. Faire l'étude des branches infinies de f .
3. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, \exists P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

4. En déduire que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} .

2 RAISONNEMENTS THÉORIQUES SIMPLES

Exercice 5 (*)

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable, telle que f' ne s'annule pas. Montrer que f ne peut pas être périodique.

Exercice 6 (*)

Soit f une fonction dérivable sur I .

1. Montrer que si f est paire, alors f' est impaire.
Montrer que si f est impaire, alors f' est paire.
2. A-t-on les réciproques ?

Exercice 7 ()**

Soit P une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2.

On suppose que P admet autant de racines distinctes que son degré (on dit que P est scindée à racines simples). Montrer qu'il en est de même pour sa dérivée P' : qu'elle est scindée à racines simples.

Exercice 8 ()**

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable, et

$$g : \begin{cases} [0; 1] & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0; \frac{1}{2}] \\ f(2x-1) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

À quelle(s) condition(s) g est-elle dérivable ?

3 SUITES RÉCURRENTES

Exercice 9 (*) (méthode)**

Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \cos(u_n) = f(u_n).$$

1. Montrer qu'il existe un réel $\ell \in [0, 1]$ tel que

$$\ell = \frac{1}{2} \cos(\ell).$$

2. Montrer que ℓ est l'unique point fixe de f .
3. Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{|u_0 - \ell|}{2^n}$
5. Montrer que (u_n) converge vers ℓ .

Exercice 10 ()**

On considère la suite u définie par $u_0 \in [0, 1]$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n^2} = f(u_n)$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que f admet un unique point fixe sur $[0, 1]$ (dont on ne cherchera pas la valeur).
On note ce point fixe ℓ .
3. Montrer que (u_n) converge vers ℓ .

Exercice 11 ()**

On considère la suite u définie par $u_0 \in]3, 4[$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = 4 - \frac{1}{4} \ln u_n = f(u_n)$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \in]3, 4[$.
2. Montrer que f admet un unique point fixe ℓ (dont on ne cherchera pas la valeur) et que $\ell \in]3, 4[$.
3. Montrer que (u_n) converge vers ℓ .

4 APPROFONDISSEMENT**Exercice 12 (**) (Prolongement de la dérivée)**

Montrer que si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et que $f'(x)$ admet une limite finie quand $x \rightarrow a$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$.

Exercice 13 (*)**

Soit I un intervalle de \mathbf{R} et $\alpha > 1$. Déterminer toutes les applications vérifiant

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$$

Exercice 14 (*) (Fonctions lipschitziennes)**

Pour $\alpha > 0$, une fonction est dite α -lipschitzienne sur I , si

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|.$$

1. (a) Montrer qu'une fonction α -lipschitzienne est continue.
(b) Si f est α -lipschitzienne, et dérivable sur I . Que peut-on dire de f' ?
(c) Montrer qu'une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un segment est lipschitzienne. Est-ce vrai pour une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle quelconque ?
2. Soit f α -lipschitzienne sur \mathbf{R} avec $\alpha < 1$.
(a) Montrer que f admet un unique point fixe.
(b) Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Montrer que (u_n) converge.

Exercice 15 (*)**

Soit $a > 0$ et f une fonction réelle continue sur $[0, a]$ et dérivable sur $]0, a[$.

On suppose que $f(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]0, a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 16 (*)**

Soit $n \in \mathbf{N}$, I un intervalle de \mathbf{R} et $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$.

On suppose que f s'annule en $n + 1$ points distincts de I .

1. Montrer que la dérivée n -ième de f s'annule au moins une fois sur I .
2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que la dérivée $(n - 1)^{\text{ème}}$ de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I .

Exercice 17 (*) (Rolle à l'infini)**

Soit $a \in \mathbf{R}$,

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a; +\infty[, \mathbf{R})$, f dérivable sur $]a; +\infty[$.

On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ qui est égale à $f(a)$.

Montrer qu'il existe $c \in]a; +\infty[$, tel que $f'(c) = 0$.