Dérivabilité

1 Calcul

Exercice 1 (*)
Sur quelle(s) partie(s) de $\mathbf{R}$, les applications suivantes sont-elles continues ? dérivables ?
Calculer leur dérivée.
Dans le cas d'un prolongement possible par continuité, étudier la dérivabilité de la fonction prolongée, éventuellement son caractère $\mathscr{C}^1$.

1. $f\ :\ x \mapsto 2^{x^2+1}$.
2. $f\ :\ x \mapsto x|x|$.
3. $f\ :\ x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$.
4. $f\ :\ x \mapsto \sqrt{x^2-x^3}$.
5. $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
6. $f\ :\ x \mapsto \ln(\sqrt{x-1}+1)$.
7. $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}} \sin \frac{1}{x}$.
8. $f\ :\ x \mapsto (x+1)^{\cos x}$.
9. $f\ :\ x \mapsto (\sqrt{x}+1)^{\ln x}$.
10. (***) $f\ :\ x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^{-x}$.

Exercice 2 (*)
À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que $\quad \forall x \in \mathbf{R}_+,\ \dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan x \leqslant x$.

Exercice 3 (**)
À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} \left((x+1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \right).$$

Exercice 4 (**)
Soit $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Montrer que f peut être prolongeable en une application continue sur $\mathbf{R}$.
   On travaillera désormais avec l'application prolongée.
2. Faire l'étude des branches infinies de f.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, \exists P_n \in \mathbf{R}[x]$ tel que
   $$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ \ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$
4. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

2 Raisonnements théoriques simples

Exercice 5 (*)
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable, telle que f' ne s'annule pas.
Montrer que f ne peut pas être périodique.

Exercice 6 (*)
Soit f une fonction dérivable sur I.

1. Montrer que si f est paire, alors f' est impaire.
   Montrer que si f est impaire, alors f' est paire.
2. A-t-on les réciproques ?

Exercice 7 (**)
Soit P une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2.
On suppose que P admet autant de racines distinctes que son degré (on dit que P est scindée à racines simples).
Montrer qu'il en est de même pour sa dérivée P' : qu'elle est scindée à racines simples.

Exercice 8 (**)
Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable, et

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(2x) & \text{si } x \in [0; \frac{1}{2}] \\ f(2x-1) & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

À quelle(s) condition(s) g est-elle dérivable ?

3 Suites récurrentes

Exercice 9 (**) (méthode)
Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\cos(u_n) = f(u_n).$$

1. Montrer qu'il existe un réel $\ell \in [0,1]$ tel que
   $$\ell = \frac{1}{2}\cos(\ell).$$
2. Montrer que ℓ est l'unique point fixe de f.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
4. Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 10 (**)
On considère la suite u définie par $u_0 \in [0,1]$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n^2} = f(u_n)$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. Montrer que f admet un unique point fixe sur $[0,1]$ (dont on ne cherchera pas la valeur).
   On note ce point fixe ℓ.
3. Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 11 (**)
On considère la suite u définie par $u_0 \in]3,4[$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 4 - \frac{1}{4} \ln u_n = f(u_n)$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in]3,4[$.
2. Montrer que f admet un unique point fixe ℓ (dont on ne cherchera pas la valeur) et que $\ell \in]3,4[$.
3. Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

4 Approfondissement

Exercice 12 (**) (Prolongement de la dérivée)
Montrer que si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b]$ et que $f'(x)$ admet une limite finie quand $x \to a$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)$.

Exercice 13 (**) (Règle de l'Hospital)
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ et telles que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
Indication[1]
2. En déduire que :
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell.$$
3. Application : calculer
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^x}{(x+1)\,\mathrm{e}^x - 1}.$$

Exercice 14 (***)
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\alpha > 1$. Déterminer toutes les applications vérifiant

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^\alpha.$$

Exercice 15 (***) (Fonctions lipschitziennes)
Pour $\alpha > 0$, une fonction est dite α-lipschitzienne sur I,si

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \alpha|x-y|.$$

1. (a) Montrer qu'une fonction α-lipschitzienne est continue.
   (b) Si f est α-lipschitzienne, et dérivable sur I. Que peut-on dire de f' ?
   (c) Montrer qu'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment est lipschitzienne. Est-ce vrai pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle quelconque ?
2. Soit f α-lipschitzienne sur $\mathbf{R}$ avec $\alpha < 1$.
   (a) Montrer que f admet un unique point fixe.
   (b) Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et
   $$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$
   Montrer que (u_n) converge.

Exercice 16 (***)
Soit $a > 0$ et f une fonction réelle continue sur $[0,a]$ et dérivable sur $]0,a]$.
On suppose que $f(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0,a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 17 (***)
Soit $n \in \mathbf{N}$, I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbf{R})$.
On suppose que f s'annule en $n+1$ points distincts de I.

1. Montrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins une fois sur I.
2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que la dérivée $(n-1)^{\text{ème}}$ de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I.

Exercice 18 (***) (Rolle à l'infini)
Soit $a \in \mathbf{R}$,
Soit $f \in \mathscr{C}^0([a;+\infty[,\mathbf{R})$, f dérivable sur $]a;+\infty[$.
On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ qui est égale à $f(a)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a;+\infty[$, tel que $f'(c) = 0$.

1. Appliquer la même méthode que pour la démonstration de l'égalité des accroissements finis.