Sommes & produits - 2

Feuille spécialement dédicacée :
« À tous ceux qui ont la tête dure et qui, ayant déjà fait l'autre feuille sur les sommes, ont encore besoin d'entrainement. »

Exercice 1 (*)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} 2^{n-k} + 3^k\right]$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[2^{n-k} + 3^k\right]$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1 - 2^{k+1}\right)$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{2k+1}$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(3^{k+1} - 2^{2k+1}\right)$
10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{3^{k+1}}{2^{2k-1}}$

Exercice 2 (**)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$, calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 2^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} 2^k$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} 2^{n-k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{n}{k-1} 2^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \frac{(-2)^{n-k}}{(n-k)!}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \frac{k}{3^k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{k+1}$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (1+x)^k (1-x)^{n-k}$
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k}$
10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+x^k\right)$

Exercice 3 (*)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, et $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, calculer

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j} 2^i$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} x^i y^{n-j}$ (pas très joli à l'arrivée.)