

SOMMES & PRODUITS - 2

Feuille spécialement dédiée :

« À tous ceux qui ont la tête dure et qui, ayant déjà fait l'autre feuille sur les sommes, ont encore besoin d'entraînement. »

Exercice 1 (*)

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer

$$1) \sum_{k=0}^n 2^k$$

$$2) \sum_{k=0}^n 2^{n-k}$$

$$3) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$

$$4) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

$$5) \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} 2^{n-k} + 3^k \right]$$

$$6) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [2^{n-k} + 3^k]$$

$$7) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 - 2^{k+1})$$

$$8) \sum_{k=1}^n 2^{2k+1}$$

$$9) \sum_{k=1}^n (3^{k+1} - 2^{2k+1})$$

$$10) \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{3^{k+1}}{2^{2k-1}}$$

Exercice 2 (**)

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$, calculer

$$1) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} 2^k.$$

$$2) \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} 2^k.$$

$$3) \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

$$4) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \binom{n}{k-1} 2^k.$$

$$5) \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \frac{(-2)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

$$6) \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \frac{k}{3^k}.$$

$$7) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{k+1}.$$

$$8) \sum_{k=0}^n (1+x)^k (1-x)^{n-k}.$$

$$9) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k}.$$

$$10) (***) \text{ pour } |x| < 1, \sum_{k=1}^n \ln(1+x^{2^k}).$$

Exercice 3 (*)

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, et $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, calculer

$$1) \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} 2^i = 4^n + 3^n.$$

$$2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n x^i y^{n-j} \quad (\text{pas très joli à l'arrivée.})$$