Équations différentielles

1 Équations d'ordre 1

Exercice 1 (*)
Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbf{R}$:

1. $y' + 2y = 0 \quad$ avec $y(0) = 1$
2. $2y' = -y \quad$ avec $y(0) = 1$
3. $y' - y = 1 \quad$ avec $y(0) = 0$
4. $2y' = 1 \quad$ avec $y(0) = 2$
5. $2y' = a - y \quad$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $y(0) = -1$
6. $y'' = 4y' + 1 \quad$ avec $y(0) = 1$ et $y'(1) = 1$

2 Équations d'ordre 2

Exercice 2 (*)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' - 2y = 1 \quad$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.
2. $y'' - 4y' + 4y = 4 \quad$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
3. $y'' + y' + \frac{y}{2} = 1 \quad$ avec $y(0) = y'(0) = 0$
4. $y'' - 2y' + y = 1 \quad$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
5. $y'' - 2y' = 1 \quad$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
6. $y'' = 1 \quad$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
7. $y'' = -y \quad$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.

3 Changement d'inconnue

Exercice 3 (**)
Résoudre l'équation différentielle $y' = y \ln y$.
On pourra poser $y(t) = \mathrm{e}^{z(t)}$.

Exercice 4 (**)
Résoudre sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x^2 y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0\,.$$

On pourra poser z *tel que :* $\forall x > 0,\ z(x) = x^2 y(x)$.

4 Autres

Exercice 5 (**)
Trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = f(-x)$$

Exercice 6 (**) (La baignoire percée)
On considère une baignoire de forme parallélépipédique dont la base est de dimensions $a \times b$ que l'on remplit avec un débit constant noté d.
On note $z(t)$ la hauteur d'eau dans la baignoire à l'instant t et $V(t)$ son volume. *On suppose que* $V(0) = 0$.
La baignoire a une fissure au fond qui laisse s'échapper plus ou moins d'eau en fonction de la pression exercée par l'eau sur celle-ci. On rappelle que la pression au fond de la baignoire est égale à $p(z) = \rho g z$ (on ne compte pas la pression atmosphérique qui s'équilibre de part et d'autre de la fissure).
Le débit de la fuite est $d_f = \alpha p$ avec $\alpha > 0$ une constante, et p la pression qui s'y exerce.
Toutes les grandeurs sont en unité SI.

1. Si on suppose la baignoire suffisamment haute, montrer que le volume d'eau tend vers un volume à l'équilibre V_{eq} que l'on déterminera.

   On pourra introduire la notation T *pour le temps caractéristique du système.*

2. Si la baignoire a un volume V (que l'on suppose inférieur au volume d'équilibre), au bout de combien de temps sera-t-elle pleine ?