Équations différentielles - 2e partie

1 Équations du premier ordre

Exercice 1 (Exemples de cours)

1. $y'(t) + 5y(t) = 0$.
2. $y'(t) + \dfrac{3}{t^2} y(t) = 0$.
3. $y'(t) + \dfrac{3}{t^2} y(t) = \dfrac{1}{t^2}$.
4. $y'(t) + \dfrac{3}{t^2} y(t) = \exp\left(\dfrac{3}{t}\right)$.
5. $y'(t) + \dfrac{3}{t^2} y(t) = \dfrac{1}{t^2} - 5\exp\left(\dfrac{3}{t}\right)$.

Exercice 2 (Équations homogènes)

1. $y'(t) + 2y(t) = 0$.
2. $y'(t) = \dfrac{2}{3} y(t)$.
3. $4y'(t) - 3y(t) = 0$.
4. $y'(t) + \dfrac{2}{t} y(t) = 0$.
5. $y'(t) + \dfrac{1}{1+t^2} y(t) = 0$.
6. $y'(t) = \dfrac{2}{1-t^2} y(t)$.

Exercice 3 (Équations avec second membre)

1. $y' = x(y+2)$.
2. $y' = -\tan(x)y + \dfrac{1}{\cos(x)}$ sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. $y' = \tan(x)y + \dfrac{1}{\cos(x)}$ sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. $y' - 3y = \mathrm{e}^{3x} + 2x\,\mathrm{e}^{x}$.
5. $y' = y + x$ avec $y(0) = 1$.
6. $y' = (1+x)\,y$.
7. $y' + 2xy = x$ avec $y(0) = 1$.
8. $y' + 2y = (x-2)^2$.
9. $y' = \cos x + y$.
10. $4y' + y = \cos(x)$ et $y(0) = 0$.
11. $y' - y = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $y(0) = 1$.

Exercice 4 (Cas général)

1. $xy' - 2y = x^2$.
2. $\left(1+x^2\right) y' - 2xy = 0$.

2 Équations du second ordre

Exercice 5

1. $y'' + y' + y = \cos(2x)$.
2. $y'' + y = \cos(x)$.
3. $y'' + 4y = \sin(2x)$.
4. $y'' + y' - 2y = x\,\mathrm{e}^{-2x}$.
5. $y'' - 4y' + 4y = (x^3 + x)\,\mathrm{e}^{2x}$.

Exercice 6
Soit $\omega_0 \geqslant 0$. Résoudre suivant les valeurs de ω :

$$y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega t)\,.$$

3 Équations autonomes

Exercice 7 (Modèle de Maltus)
On note $N(t)$ la population au temps $t \geqslant 0$, $K > 0$ et $r > 0$ deux constantes réelles. Le modèle de Maltus s'écrit

$$(E)\ :\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

On cherche résoudre l'équation (E) pour $N(0) = N_0 \in]0, K[$.

1. On cherche déjà à justifier que $\forall t \geqslant 0,\ N(t) \in]0, K[$. On suppose N solution et pour tout $t \geqslant 0$, on pose
$$f(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right).$$
   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ puis justifier que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficient continu.
   (b) Montrer que $f(0) \neq 0$ et en déduire que $\forall t \geqslant 0,\ f(t) \neq 0$.
   (c) Montrer que $\forall t \geqslant 0,\ N(t) \in]0, K[$.
2. Résolution de l'équation.
   (a) Montrer qu'il existe deux constantes $a, b \in \mathbf{R}^2$ telles que
$$\forall N \in \mathbf{R}\backslash\{0,\, K\}\,, \quad \frac{K}{N(K-N)} = \frac{a}{N} + \frac{b}{K-N}.$$
   (b) Résoudre (E) en utilisant la méthode de séparation des variables.

Exercice 8 (Modèle de Gompretz)
Avec les mêmes notations et condition initiale qu'à l'exercice précédent, on suppose à présent que N vérifie l'équation différentielle

$$(E)\ :\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\ln\left(\frac{K}{N}\right).$$

Résoudre (E) sur $\mathbf{R}_+$ en s'inspirant de la méthode de résolution de l'exercice précédent.

4 Changements d'inconnue ou de variable

Exercice 9 (**)
Trouver les fonctions y, dérivables sur $]0, +\infty[$, ne s'annulant pas sur $]0, +\infty[$, vérifiant :

$$x^2y^2 - xy' + y = 0.$$

Indication : on pourra poser: $z = \dfrac{1}{y}$.

Exercice 10 (**)
Résoudre sur $\mathbf{R}_+^*$,

$$(E) \qquad 4ty'' + 2y' - y = 0.$$

On pourra poser $u = \sqrt{t}$.

5 Lien avec l'intégration

Exercice 11
Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \int_0^x (2x - 3t) f(t) \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 12
Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad 2f(x) = 3x \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 13
Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad f'(x) + f(-x) = -2(x+1)\,\mathrm{e}^x.$$

Exercice 14
Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \qquad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t.$$