

ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

1 PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1 (*)

Soit E espace euclidien muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Pour $a \in E$ non nul et $\lambda \in \mathbf{R}$, résoudre l'équation $\langle a, x \rangle = \lambda$ d'inconnue $x \in E$.

Exercice 2 (*)

Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de \mathbf{R}^3 .

On définit sur $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, l'application φ par

$$\varphi(x, y) = ax_1y_1 + 2x_1y_2 + bx_2y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_3y_3.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que φ soit un produit scalaire sur \mathbf{R}^3 .

Exercice 3 (*)

Dans $E = \mathbf{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle, on définit les vecteurs

$$u = (1, 1, 1), v = (0, 1, 0), w = (0, 0, 1).$$

- Justifier que (u, v, w) est une base de E .
- À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, obtenir une base orthonormale de E à partir de (u, v, w) (dans cet ordre).

Exercice 4 (*)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}_+)$ une application positive ou nulle. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

Montrer que

$$\forall n, p \in \mathbf{N}^2, \quad I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}.$$

Exercice 5 (**)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire positive non identiquement nulle.

Soit $\eta \in [0, 1]$,

- Montrer que

$$\mathbf{E}(X \mathbf{1}_{\{X \geq \eta \mathbf{E}(X)\}})^2 \leq \mathbf{E}(X^2) \mathbf{P}(X \geq \eta \mathbf{E}(X)).$$

- En déduire

$$\mathbf{P}(X \geq \eta \mathbf{E}(X)) \geq (1 - \eta)^2 \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}.$$

Exercice 6 (*)

Dans \mathbf{R}^4 muni de sa structure euclidienne usuelle,

on pose $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $v_2 = (0, 3, 1, -1)$.

- Déterminer un système d'équations définissant F^\perp .
- En déduire une base de F^\perp , puis une base orthogonale de F^\perp .

Exercice 7 (*) (Réciproque de Pythagore)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, et x_1, x_2, \dots, x_p , p vecteurs de E .

- Si $p = 2$, démontrer la réciproque du théorème de Pythagore :

« Si la somme des carrés des longueurs de deux côtés du triangle est égale au carré de la longueur du troisième, alors le triangle est rectangle et le troisième côté est l'hypoténuse. »

- Ce résultat est-il encore vrai pour $p \geq 3$?

À savoir : si $\left\| \sum_{i=1}^p x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2$, alors la famille est orthogonale.

Exercice 8 (**)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et (e_1, e_2, \dots, e_n) des vecteurs unitaires de E , tels que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2.$$

- Montrer que (e_1, e_2, \dots, e_n) est une famille orthonormale de E .
- Montrer que c'est une base de E .

2 APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 9 (***)

Sur $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ (avec $a < b$), pour tout $p \geq 1$, on définit

$$\|\cdot\|_p : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbf{R} \\ f & \mapsto \|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de montrer le résultat admis dans le cours, à savoir que $\|\cdot\|_p$ est bien une norme sur E .

- 1) À quoi correspond $\|\cdot\|_2$?
En déduire que $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.
- 2) Pour généraliser cette relation, on pose $p > 1$ et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
On veut montrer l'inégalité de Hölder :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

- (a) Montrer que pour tous $(x, y) \in \mathbf{R}_+^2$,

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

- (b) En déduire l'inégalité de Hölder.
Indication : On pourra commencer par la montrer pour des applications de « norme » 1.

- 3) Montrer que $\|\cdot\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire (dite inégalité de Minkowski).
Indication : Appliquer l'inégalité de Hölder avec $(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p-1}$.

Exercice 10 (*)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

Montrer que $\text{Im } f = (\ker f)^\perp$.

Exercice 11 (**)

Soit U un vecteur colonne de norme 1 pour le produit scalaire usuel.
On pose $P = UU^T$.

Montrer que P est une projection orthogonale sur un espace à déterminer.

Exercice 12 (**)

Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2.
Soit $f \in \text{GL}(E)$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0.$$

- 1) Montrer que pour tout $y \in E$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que
 $\forall x \in E, (f(x)|f(y)) = \lambda(x|y)$.

- 2) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \|\alpha f(x)\| = \|x\|.$$

Exercice 13 (***)

Soient E, F deux espaces préhilbertiens,
 $f : E \rightarrow F$ une application telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

Montrer que f est linéaire.

3 INÉGALITÉS

Exercice 14 (**)

Soit E un espace vectoriel euclidien et $\|\cdot\|$ sa norme euclidienne.
Montrer qu'un projecteur est orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Exercice 15 (**)

Dans \mathbf{R}^n , on définit $P = (p_{i,j})_{i,j}$ la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre. Montrer que

$$\left| \sum_{i,j} p_{i,j} \right| \leq n\sqrt{n}.$$

Exercice 16 (*) (Des calculs...)

Soit $E = \mathbf{R}[X]$, l'espace des polynômes réels.
On munit E du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

- 1) À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, orthonormaliser la famille $(1, X, X^2, X^3)$.
- 2) Calculer la distance de X^3 à $\mathbf{R}_2[X]$.

Exercice 17 ()**

Calculer

$$\inf_{(a,b) \in \mathbf{R}^2} \int_0^\pi (\sin t - at - b)^2 dt.$$

4 ENTRAÎNEMENT**Exercice 18 (*)**Soit F le sous espace vectoriel de \mathbf{R}^4 définie par l'équation cartésienne :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4, x + y - 2z = 0\}.$$

Déterminer la distance de $(1, 1, 0, 1)$ à F .**Exercice 19 (**)**Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg.$$

- 1) On pose $F = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
- 2) On pose $G = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$.
En s'aidant d'une intégration par parties, montrer que $G^\perp = \{0\}$.
- 3) Commenter.

Exercice 20 ()**

On a vu que pour un produit scalaire fixé, il est toujours possible d'orthonormaliser une base avec Gram-Schmidt.

Montrer que pour une base (e_1, \dots, e_n) de E fixée, il est possible de trouver un produit scalaire pour lequel cette base est orthonormale.**Exercice 21 (***)**

- 1) Démontrer le théorème de Fréchet-Von Neumann-Jordan : « Une norme est euclidienne si, et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme. »
Indication : Utiliser une formule de polarisation symétrique et commencer par démontrer que $\langle x, 2y \rangle = 2\langle x, y \rangle$, puis $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$.
- 2) Démontrer que $(x, y) \mapsto |x| + 2|y|$ est une norme sur \mathbf{R}^2 , mais qu'elle n'est pas euclidienne.
- 3) Démontrer que $f \mapsto \int_0^1 |f|$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$, mais qu'elle n'est pas euclidienne.

Exercice 22 (*) (Matrice de Gram)**Soit E un espace euclidien de dimension p et $(x) = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de E . On définit la matrice de Gram par

$$G(x) = G(x_1, \dots, x_n) = ((x_i | x_j))_{(i,j)}.$$

et $\mathcal{G}(x) = \det(G(x))$ son déterminant.

- 1) On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de E . Pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ on pose

$$P = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Montrer que $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = P^T P$.

- 2) (a) On suppose ici $n = p$. Montrer que (x_1, \dots, x_p) est une famille libre si, et seulement si $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_p) > 0$.
(b) Plus généralement, pour $n \leq p$, montrer que (x_1, \dots, x_n) est libre si, et seulement si $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n) > 0$.
- 3) On suppose que (x_1, \dots, x_n) est une famille libre de E .
On note $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.
Montrer que

$$d(x, F)^2 = \frac{\mathcal{G}(x, x_1, \dots, x_n)}{\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n)}.$$

Exercice 23 (*)**Soit $E = \mathbf{R}[X]$, l'espace des polynômes réels.On munit E du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

Existe-t-il $A \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbf{R}[X], \langle P, A \rangle = P(0)$.**Exercice 24 (**)**On note $\ell^1(\mathbf{N})$ l'ensemble des familles sommable indicées par \mathbf{N} et $\ell^2(\mathbf{N})$ l'ensemble des familles de carré sommable (indicées par \mathbf{N}) et plus généralement, pour $p \in [1, +\infty[$, on note $\ell^p(\mathbf{N})$ l'ensemble des familles $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telles que $\sum |u_n|^p$ converge. Et $\ell^\infty(\mathbf{N})$ l'ensemble des suites bornées. Soient $1 < q < p < \infty$.

- 1) Montrer que ℓ^1 et ℓ^2 sont des espaces vectoriels.
- 2) Montrer que $\ell^1 \subset \ell^2$.
- 3) Montrer que $\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^p \subset \ell^\infty$.
- 4) Montrer que les inclusions sont toutes strictes.
- 5) Montrer que $(a, b) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ définit un produit scalaire sur ℓ^2 .

Exercice 25 () (Mines)**

Soit E un espace préhilbertien, de produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et de norme associée $\|\cdot\|$.

Soient $n \geq 1$, $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et $C > 0$.

On suppose que

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k u_k \right\| \leq C.$$

Montrer que $\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 \leq C^2$.

Exercice 26 (IMT 2023)

On note $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$.

Pour $(f, g) \in E^2$, on pose

$$(f|g) = \int_0^1 (fg + f'g').$$

On note $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \cap \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbf{R}), f'' = f\}$.

- 1) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur E .
- 2) Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels, puis que $\{t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t}\}$ est une base de W .
- 3) Montrer que W et V sont orthogonaux.
- 4) Pour $f \in E$, calculer $p_W(f)$ le projeté orthogonal de f sur W .
- 5) Montrer que V et W sont supplémentaires.

5 CCINP

Exercice 27 (CCINP 39-extrait)

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

- 1) (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

- (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire dans ℓ^2 .

- 2) On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.

Déterminer F^\perp (au sens de $(\cdot|\cdot)$).

Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

Exercice 28 (CCINP 76)

Soit E un espace préhilbertien de produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$.

- 1) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donner le cas d'égalité (avec démonstration).
- 2) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R}), \forall x \in [a, b], f(x) > 0\}$.
Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)}, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m .
Déterminer la valeur de m .

Exercice 29 (CCINP 77)

Soit E un espace euclidien.

F, G sont deux sous-espaces vectoriels de E .

- 1) Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.
- 2) Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
- 3) Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 30 (CCINP 78)

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E .

On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

- 1) Soit u un endomorphisme de E , tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
(a) Démontrer que: $\forall (x, y) \in E^2 (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
(b) Démontrer que u est bijectif.
- 2) On rappelle qu'une application u est une isométrie si, et seulement si $\forall (x, y) \in E^2, \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$.
Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi \circ , est un groupe.
- 3) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Exercice 31 (CCINP 79)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

- 1) Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans \mathbf{R} .

Démontrer que $\int_a^b h(x) dx = 0 \Rightarrow h = 0$.

- 2) Soit E le \mathbf{R} -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbf{R} .

On pose

$$\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

- 3) Majorer $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx$ en utilisant Cauchy-Schwarz.

Exercice 32 (CCINP 80)

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π périodiques de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

- 1) Démontrer que $(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} fg$ définit un produit scalaire sur E .
- 2) Soit F , le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de $u : x \mapsto \sin^2(x)$.

Exercice 33 (CCINP 81)

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ l'application φ par $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^T A')$.

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

- 1) Démontrer que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
- 2) Déterminer une base de \mathcal{F}^\perp .
- 3) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur \mathcal{F}^\perp .
- 4) Calculer la distance de J à \mathcal{F} .

Exercice 34 (CCINP 82)

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y_0 \in F$ tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\langle A|A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

- 1) Démontrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
- 2) Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 35 (CCINP 92)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

On pose $\forall (A, B) \in E^2, \langle A|B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A .

- 1) Prouver que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
- 2) On note $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E . Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E . On admet que $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
- (a) Prouver que $E = \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.
- (b) Prouver que $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.
- 3) Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E . Déterminer F^\perp .