Espaces vectoriels en dimension finie

1 Espaces vectoriels

Exercice 1 (*)
Dire à chaque fois s'il s'agit d'un espace vectoriel, puis le démontrer.

1. $\{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2, \text{ tel que } x = y\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \text{ tel que } 2x - 5y - 1 = 0\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \text{ tel que } 2xy = 0, x + y = 0\}$
4. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \text{ tel que } (x-1)y = 0\}$
5. $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x + y + z = 0, x - y + z = 0\}$
6. $\{(x, 2x, 3x)\}_{x\in\mathbf{R}}$
7. $\{(x,y,z), \text{ tel que } \exists m \in \mathbf{R}, x = m(y+z)\}$
8. Le disque unité de $\mathbf{R}^2$.
9. L'axe des abscisses de $\mathbf{R}^2$.
10. Les deux axes (abscisses et ordonnées) de $\mathbf{R}^2$.
11. Pour $n \geqslant 1$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures réelles d'ordre n.
12. Pour $n \geqslant 1$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures réelles d'ordre n à coefficients strictement positifs.

Exercice 2 (*)
Les espaces suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $E = \{(x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbf{R}^4,$
tels que $x + 2y - z = 0$ et $-y + 3t = 0\}$
2. $E = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } xy = z,\ x + y = z\}$
3. $E = \{(x,\ y,\ 2x,\ -y),\ (x,y) \in \mathbf{R}^2\}$

Exercice 3 (**)
(hors programme)
Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, soit F l'ensemble des applications croissantes sur $\mathbf{R}$, et G l'ensemble des applications décroissantes sur $\mathbf{R}$.

1. F et G sont-ils tous deux des sous-espaces vectoriels de E ?
2. L'ensemble des applications qui sont sommes d'une application croissante et d'une application décroissante est-il un sous-espace vectoriel de E ?

2 Espaces engendrés

Exercice 4 (*)
Soit $e_1 = (1,-1,1,2)$ et $e_2 = (-1,2,3,1)$.
À quelles conditions sur $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, le vecteur $u = (-2,x,y,3)$ appartient-il à $\mathrm{Vect}\,(e_1,e_2)$?

Exercice 5 (**)

1. $(4,5,1)$ est-il une combinaison linéaire de $(2,3,0)$ et $(1,1,0)$?
2. Décrire le $\mathbf{R}-$espace vectoriel engendré par $(0,1,1)$ et $(0,1,0)$.

3 Familles de vecteurs de $\mathbf{R}^n$

Exercice 6 (*)
Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(1,1,1)\,,\,(2,2,2)$ dans $\mathbf{R}^3$
2. $(1,0,1)\,,\,(2,2,2)$ dans $\mathbf{R}^3$
3. $(1,0,1)\,,\,(0,2,2)\,,\,(3,3,0)$ dans $\mathbf{R}^3$
4. $(1,2,5)\,,\,(-1,2,-2)\,,\,(-1,6,1)$ dans $\mathbf{R}^3$
5. $(-1,-2,2)\,,\,(4,-3,-2)\,,\,(2,-1,-1)$ dans $\mathbf{R}^3$

Exercice 7 (*)
Soit $a \in \mathbf{R}$. $u = (a,1,1)$, $v = (1,a,1)$ et $w = (1,1,a)$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que (u,v,w) soit libre dans $\mathbf{R}^3$.

Exercice 8 (**)
Dans $\mathbf{R}^n$, on considère une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants (e_1,e_2,e_3,e_4).
Les familles suivantes sont-elles libres :

1. $(e_1, 2e_2, e_3)$
2. (e_1, e_3)
3. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$
4. $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$
5. $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$
6. $(e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3, e_1 + 2e_2 - e_4, 3e_1 - e_2 + e_3)$

Exercice 9 (*)
Parmi les familles suivantes, lesquelles sont génératrices de $\mathbf{R}^3$?

1. $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,2))$
2. $((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$
3. $((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$
4. $((1,0,3),(0,2,1),(3,1,1),(2,1,-1))$

Exercice 10 (**)
Montrer que la famille $(2,1,1)$, $(1,4,3)$, $(0,1,1)$, $(1,2,3)$ forme une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$.
Trouver une base extraite de cette famille.

Exercice 11 (**)
On pose $e_1 = (-1,1,1)$, $e_2 = (1,-1,1)$ et $e_3 = (1,1,-1)$.
Montrer que (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et donner les coordonnées de $(8,4,2)$ dans cette base.

4 Dimension finie

Exercice 12 (**) (méthode)
Montrer que dans $\mathbf{R}^3$,

$$\text{Vect}\left((2,3,-1),(1,-1,-2)\right) = \text{Vect}\left((3,7,0),(5,0,-7)\right)$$

Exercice 13 (**)
Dans $\mathbf{R}^3$, les deux espaces $F_1 = \text{Vect}\left((1,2,3),\ (3,2,1)\right)$, et $F_2 = \text{Vect}\left((1,0,-1),\ (2,4,6)\right)$ sont-ils égaux ?

Exercice 14 (*) (Égalité d'espaces)
Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ suivants :
$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 / x+y+z=0 \text{ et } 2x+y+z-t=0\right\}$
$G = \text{Vect}\left((1,-2,1,1),(1,2,-3,1),(5,-3,-2,5)\right)$

1. Calculer la dimension de F.
2. Montrer que $G \subset F$.
3. Montrer que $G = F$.

Exercice 15 (*)
À quelles conditions sur a la famille suivante forme-t-elle une base de $\mathbf{R}^3$?

$$\left((1,-2,0),\ (2,-1,2),(1,0,a)\right).$$

Pour $a = 0$, exprimer la base canonique dans cette base.

Exercice 16 (**)
Soient $v_1 = (2,-1,-1)$, $v_2 = (-1,2,3)$, $v_3 = (1,4,7)$ et $v_4 = (1,1,2)$.
On pose $F = \text{Vect}\,(v_1,v_2,v_3,v_4)$.

1. Montrer sans calcul que la famille (v_1,v_2,v_3,v_4) est liée.
2. Quelle est la dimension de F.
3. Extraire de la famille (v_1,v_2,v_3,v_4) une sous famille libre de cardinal maximal.
4. Compléter cette base en une base de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 17 (**)
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1,1,1,1) \quad v_2 = (1,2,3,4) \quad v_3 = (3,1,4,2)$$
$$v_4 = (10,4,13,7) \quad v_5 = (1,7,8,14)$$

1. La famille de ces cinq vecteurs est-elle libre ?
2. Quel est son rang ?
3. Extraire de cette famille une base $\mathcal{E}$ de $F = \text{Vect}\,(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$.
4. À quelle condition sur ses coordonnées, un vecteur (x_1,x_2,x_3,x_4) appartient-il à F ?
5. Compléter la famille $\mathcal{E}$ en une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 18 (*)

$$\text{Soient } \begin{cases} x_1 &= (1,\ 2,\ 2,\ 0) \\ x_2 &= (0,\ 1,\ 0,\ 1) \\ x_3 &= (0,\ 1,\ 1,\ 0) \\ x_4 &= (1,\ 0,\ 1,\ -1) \end{cases}$$

et $E = \text{Vect}\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$
Donner la dimension de E et une base de E.

Exercice 19 (*)
Montrer que la famille

$$\left((2,1,1),\ (1,4,3),\ (0,1,1),\ (1,2,3)\right)$$

forme une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$.
Trouver une base extraite de cette famille.

Exercice 20 (*)

1. Donner le rang de la famille :
$$S = \left\{u_1 = (1,2,1,0), u_2 = (-1,1,1,1),\right.$$
$$\left. u_3 = (2,-1,0,1), u_4 = (2,2,2,2)\right\}.$$
2. À partir d'une famille libre extraite de S, la compléter pour obtenir une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 21 (**)
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1,1,1,1), \quad v_2 = (1,2,3,4), \quad v_3 = (3,1,4,2),$$
$$v_4 = (10,4,13,7), \quad v_5 = (1,7,8,14).$$

1. La famille de ces cinq vecteurs est-elle libre ?
2. Quel est son rang ?
3. Extraire de cette famille une base $\mathcal{E}$ de $F = \text{Vect}\,(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$.
4. À quelle condition sur ses coordonnées, un vecteur (x_1,x_2,x_3,x_4) appartient-t-il à F ?
5. Compléter la famille $\mathcal{E}$ en une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 22 (**)
Dans $\mathbf{R}^n$, on considère une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants (e_1,e_2,e_3,e_4).
Les familles suivantes sont-elles libres :

1. $(e_1, 2e_2, e_3)$.
2. (e_1, e_3).
3. $(e_1, 2e_1+e_4, e_4)$.
4. $(3e_1+e_3, e_3, e_2+e_3)$.
5. $(2e_1+e_2, e_1-3e_2, e_4, e_2-e_1)$.
6. $(e_1+e_2, e_1-e_2, e_3, e_1+2e_2-e_4, 3e_1-e_2+e_3)$.

Exercice 23 (**)

1. Donner une base et la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.
(matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$)
2. Faire de même avec $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.
(matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$)

Exercice 24 (**)
Soit E le sous-ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ défini par

$$E=\left\{M\left(a,b,c\right)=\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, \quad (a,b,c)\in\mathbf{R}^3\right\}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que E est stable par produit matriciel.
3. Donner la dimension de E.

5 Espaces de polynômes

Exercice 25 (*)
Donner une famille génératrice de

$$\left\{P\in\mathbf{R}_3[X] \text{ tel que } P(0)=P'(0)=0\right\}.$$

Exercice 26 (**) (base)
Soit F défini par :

$$F=\left\{P\in\mathbf{R}_3[X], \int_0^1 P=0\right\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Donner une base de F.

Exercice 27 (**) (à savoir refaire)
Soit $(P_0,P_1,\cdots,P_n)$ une famille de $\mathbf{R}_n[X]$ telle que

$$\forall i\in[\![0,n]\!],\ \deg P_i=i.$$

Montrer que cette famille est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 28 (**)
Soit $n\in\mathbf{N}^*$, et $P\in\mathbf{R}_n[X]$ de degré exactement égal à n.
Montrer que $(P,P',P'',P^{(3)},\dots,P^{(n)})$ forme une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 29 (***) (classique)
Soient $a_0,a_1,\cdots,a_n,\ n+1$ réels distincts.

1. Montrer que $\forall i\in[\![0,n]\!],\ \exists! P_i\in\mathbf{R}_n[X]$ tel que P_i unitaire, $\deg P_i=n$ et P_i s'annule en $(a_k)_{k\neq i}$.
2. Montrer que $(P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n)$ forment une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

6 Approfondissement

Exercice 30 (***) (Famille filtrante)
Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E.
Montrer que $F\cup G$ est un sous espace vectoriel de E si, et seulement si $F\subset G$ ou $G\subset F$.

Exercice 31 (***)
Soit $(e_1,...,e_p)$ une famille libre de E.
Montrer que

$$a\notin \operatorname{Vect}(e_1,...,e_p)\Rightarrow(e_1+a,...,e_p+a) \text{ est libre.}$$

Exercice 32 (***)
Soient $p\in\mathbf{N}^*$ et E l'ensemble des suites réelles de période p.
Montrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Donner la dimension de E et une base.

Exercice 33 (***) (Lemme d'échange)
Soient $(e_1,...,e_n)$ et $(e'_1,...,e'_n)$ deux bases d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.
Montrer qu'il existe $j\in\{1,...,n\}$ tel que la famille $(e_1,...,e_{n-1},e'_j)$ soit encore une base de E.