Espaces vectoriels

1 Espaces vectoriels

Exercice 1 (*)
Dire à chaque fois s'il s'agit d'un espace vectoriel, puis le démontrer.
Lorsqu'il s'agit d'un espace vectoriel, en trouver une base.

1. Le plan complexe $\mathbf{C}$.
2. $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}_+^2,\ \text{tel que } x=y\right\}$
3. $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ \text{tel que } 2x-5y-1=0\right\}$
4. $\{(x,2x,3x)\}_{x\in\mathbf{R}}$
5. $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ \text{tel que } 2xy=0, x+y=0\right\}$
6. $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ \text{tel que } (x-1)y=0\right\}$
7. $\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ \text{tel que } x+y+z=0, x-y+z=0\right\}$
8. $\{(x,y,z),\ \text{tel que } \exists m\in\mathbf{R}, x=m(y+z)\}$
9. Le disque unité de $\mathbf{R}^2$.
10. L'axe des abscisses de $\mathbf{R}^2$.
11. Les deux axes (abscisses et ordonnées) de $\mathbf{R}^2$.
12. Pour f une application réelle fixée, l'ensemble des $x\in\mathbf{R}$ tels que $f(x)=0$.
13. $E=\left\{(x,\,y,\,z,\,t)\in\mathbf{R}^4,\right.$ $\left.x+2y-z=0 \text{ et } -y+3t=0\right\}$
14. $E=\left\{(x,\,y,\,z)\in\mathbf{R}^3,\ \text{tel que } xy=z,\ x+y=z\right\}$
15. $E=\left\{(x,\,y,\,2x,\,-y),\ (x,y)\in\mathbf{R}^2\right\}$

Exercice 2 (**)

1. Donner une base et la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.
(matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$)
2. Faire de même avec $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.
(matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$)

Exercice 3 (**)
Soit E le sous-ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ défini par

$$E=\left\{M\left(a,b,c\right))=\begin{pmatrix}a&0&c\\0&b&0\\c&0&a\end{pmatrix},\quad (a,b,c)\in\mathbf{R}^3\right\}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Donner la dimension de E.

Exercice 4 (***) (Famille filtrante)
Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E.
Montrer que $F\cup G$ est un espace vectoriel si et seulement si $F\subset G$ ou $G\subset F$.

2 Espaces engendrés

Exercice 5 (*)
Soit $e_1=(1,-1,1,2)$ et $e_2=(-1,2,3,1)$.
À quelles conditions sur $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, le vecteur $u=(-2,x,y,3)$ appartient-il à $\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$?

Exercice 6 (**)

1. $(4,5,1)$ est-il une combinaison linéaire de $(2,3,0)$ et $(1,1,0)$?
2. Décrire le $\mathbf{R}-$espace vectoriel engendré par $(0,1,1)$ et $(0,1,0)$.

Exercice 7 (*)
Soient F,G les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ suivants :
$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4/x+y+z=0 \text{ et } 2x+y+z-t=0\right\}$
$G=\operatorname{Vect}\big((1,-2,1,1),(1,2,-3,1),(5,-3,-2,5)\big)$

1. Calculer la dimension de F.
2. Montrer que $G\subset F$.
3. Montrer que $G=F$.

Exercice 8 (**)
Montrer que dans $\mathbf{R}^3$,

$$\operatorname{Vect}\left((2,3,-1),(1,-1,-2)\right)=\operatorname{Vect}\left((3,7,0),(5,0,-7)\right)$$

Exercice 9 (**)
Dans $\mathbf{R}^3$, les deux espaces
$F_1=\operatorname{Vect}\left((1,2,3),\,(3,2,1)\right)$
et $F_2=\operatorname{Vect}\left((1,0,-1),\,(2,4,6)\right)$
sont-ils égaux ?

3 Familles libres, familles liées, bases

Exercice 10 (*)
Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(1,1,1)\,,\,(2,2,2)$ dans $\mathbf{R}^3$
2. $(1,0,1)\,,\,(2,2,2)$ dans $\mathbf{R}^3$
3. $(1,0,1)\,,\,(0,2,2)\,,\,(3,3,0)$ dans $\mathbf{R}^3$
4. $(1,2,5)\,,\,(-1,2,-2)\,,\,(-1,6,1)$ dans $\mathbf{R}^3$
5. $(-1,-2,2)\,,\,(4,-3,-2)\,,\,(2,-1,-1)$ dans $\mathbf{R}^3$

Exercice 11 (*)
Parmi les familles suivantes, lesquelles sont génératrices de $\mathbf{R}^3$? Les familles suivantes sont-elles génératrices de $\mathbf{R}^3$?

1. $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,2))$
2. $((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$
3. $((1,1,1),(0,1,1))$
4. $((1,1,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,0,0))$

Exercice 12 (*)

1. (a, b) liée $\Rightarrow b \in \text{Vect}(a)$?

2. Soient a, b, c trois vecteurs non nuls.
(a, b, c) liée $\Rightarrow c \in \text{Vect}(a, b)$?

Exercice 13 (***)
Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre de E.
Montrer que

$$a \notin \text{Vect}(e_1, ..., e_p) \Rightarrow (e_1 + a, ..., e_p + a) \text{ est libre.}$$

Exercice 14 (*)
On pose $e_1 = (-1, 1, 1)$, $e_2 = (1, -1, 1)$ et $e_3 = (1, 1, -1)$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et donner les coordonnées de $(8, 4, 2)$ dans cette base.

Exercice 15 (*)
À quelles conditions sur a la famille suivante forme-t-elle une base de $\mathbf{R}^3$?

$$\big((1, -2, 0),\ (2, -1, 2), (1, 0, a)\big).$$

Pour $a = 0$, exprimer la base canonique dans cette base.

Exercice 16 (*)
Montrer que la famille

$$\big((2, 1, 1),\ (1, 4, 3),\ (0, 1, 1),\ (1, 2, 3)\big)$$

forme une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$.
Trouver une base extraite de cette famille.

Exercice 17 (*)

1. Donner le rang de la famille :

$$S = \big\{u_1 = (1, 2, 1, 0), u_2 = (-1, 1, 1, 1),\\ u_3 = (2, -1, 0, 1), u_4 = (2, 2, 2, 2)\big\}.$$

2. À partir d'une famille libre extraite de S, la compléter pour obtenir une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 18 (**)
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 2, 3, 4), \quad v_3 = (3, 1, 4, 2),\\ v_4 = (10, 4, 13, 7), \quad v_5 = (1, 7, 8, 14).$$

1. La famille de ces cinq vecteurs est-elle libre ?

2. Quel est son rang ?

3. Extraire de cette famille une base $\mathcal{E}$ de $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.

4. À quelle condition sur ses coordonnées, un vecteur (x_1, x_2, x_3, x_4) appartient-t-il à F ?

5. Compléter la famille $\mathcal{E}$ en une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 19 (**)
Dans $\mathbf{R}^n$, on considère une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants (e_1, e_2, e_3, e_4).
Les familles suivantes sont-elles libres :

1. $(e_1, 2e_2, e_3)$.

2. (e_1, e_3).

3. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$.

4. $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$.

5. $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$.

6. $(e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3, e_1 + 2e_2 - e_4, 3e_1 - e_2 + e_3)$.

Exercice 20 (***) (Lemme d'échange)
Soient $(e_1, ..., e_n)$ et $(e'_1, ..., e'_n)$ deux bases d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.
Montrer qu'il existe $j \in \{1, ..., n\}$ tel que la famille $(e_1, ..., e_{n-1}, e'_j)$ soit encore une base de E.