Limites et continuité

1 Limites

Exercice 1 (*)
Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle admet une limite au point a, une limite à droite, à gauche.
Si elle est définie en a, étudier sa continuité en a, à droite de a, à gauche de a.
Si elle n'est pas définie en a, étudier si elle admet un prolongement par continuité en a.

1) $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ en $a = 1$.
2) $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$ en $a = 0$.
3) $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ en $a = 1$.
4) $x \mapsto x\left|1+\dfrac{1}{x}\right|$ en $a = 0$.
5) $x \mapsto x\sin\dfrac{1}{x}$ en $a = 0$.
6) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ en $a = 0$.
7) $x \mapsto \dfrac{2x^2-5x+1}{x^2-1}$ en $a = 1$.
8) $x \mapsto \sqrt{x}\ln x$ en $a = 0$.
9) $x \mapsto |x|\ln|x|$ en $a = 0$.
10) $x \mapsto x^\pi$ en $a = 0$.
11) $x \mapsto \dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$ en $a = 1$.
12) $x \mapsto \dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2-7x}$ en $a = 0$.

Exercice 2 (**)
Déterminer les limites suivantes si elles existent :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$.
2) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln x)$.

Exercice 3 (**)

$$f : x \mapsto \frac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$$

La fonction admet-elle une limite en $+\infty$?
Indication : étudier $f(n)$ et $f(n+\frac{1}{2})$.

2 Fonctions usuelles

Exercice 4 (**)
Étudier la continuité sur $\mathbf{R}$ de l'application

$$f : x \mapsto \lfloor x\rfloor + \sqrt{x-\lfloor x\rfloor}.$$

Exercice 5 (***)
Étudier la continuité de la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$.

$$f : x \mapsto \sup_{n\in\mathbf{N}} \frac{x^n}{n!}$$

3 Continuité

Exercice 6 (*)
Montrer qu'un polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 7 (*)
Montrer qu'une application continue périodique sur $\mathbf{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 8 (**) (méthode)

1) Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$ et f continue sur $]a, b[$.
On suppose que f admet des limites finies en a et en b.
Montrer que f est bornée sur $]a, b[$.
2) Montrer que le résultat subsiste pour $a = -\infty$ et $b = +\infty$.

Exercice 9 (*)
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1];[0,1])$.
Montrer que f admet un point fixe dans $[0,1]$, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 10 (*)
Montrer que si $f\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et n'admet pas de point fixe, alors $f\circ f$ n'admet pas de point fixe non plus.
Montrer que le résultat n'est plus vrai si f n'est pas supposée continue.

Exercice 11 (**)
Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbf{R}$.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 12 (*)
Montrer que les seules applications continues sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$ sont les applications constantes.

Exercice 13 (**)
Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, continue, telle que $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f(x) < x$.

1) Montrer que $f(0) = 0$.
2) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}_+^*$, avec $a \leqslant b$, il existe $M \in [0, 1[$, tel que
$$\forall x \in [a, b],\ f(x) \leqslant Mx.$$

Exercice 14 (*)
Soit $f\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction bornée sur $\mathbf{R}$ et $g\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées sur $\mathbf{R}$.

Exercice 15 (**)
Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction croissante sur $]a, b]$ et continue en a.
Montrer que f est croissante sur $[a, b]$. Faire de même avec la stricte croissance.

Exercice 16 (**)

1) Soit f une application continue surjective de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}$. Montrer que pour tout $y \in \mathbf{R}$, y admet une infinité d'antécédents par f.
2) Ce résultat est-il aussi valable si l'application est de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$? Justifier.
3) Donner l'exemple d'une application continue surjective de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}$. Démontrer que l'exemple est valable.

4 Équations fonctionnelles

Exercices à faire dans l'ordre. On pourra utiliser les résultats des exerices précédents pour résoudre les suivants.

Exercice 17 (**)
Trouver toutes les applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 18 (***)
Trouver toutes les applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Exercice 19 (***)
Trouver toutes les applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x) \times f(y).$$

5 Entraînement

Exercice 20 (*)
Montrer qu'une fonction polynomiale à valeurs dans $\mathbf{Q}$ est constante.

Exercice 21 (*)
f continue sur $[0, 1]$, montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{f(k/n)}{2^k}\right)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 22 (**)
Trouver les fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ solution de :
$$y' = |y|.$$

Exercice 23 (**)
Soit f décroissante et continue sur $\mathbf{R}$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 24 (**)
Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ une application croissante telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 25 (***)
Soit f continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists a_n \in [0, 1], f(a_n) = a_n^n$.
2) En supposant f strictement décroissante, montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n$ est unique et étudier la suite (a_n).

Exercice 26 (***)
Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue vérifiant
$$f \circ f = \mathrm{Id}.$$
Déterminer f.

Exercice 27 (***)
Soit $f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists \alpha_n \in [0, 1],\ \text{tel que } f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha_n).$$