Applications linéaires

1 Pour commencer

Exercice 1 (Vrai-Faux)
Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1) $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (5x+2y, x-y)\end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (xy, y)\end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^3\\ (x,y) & \mapsto & (x+1, y, x+y)\end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2\\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, z)\end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^4\\ (x,y,z) & \mapsto & (x,x,x,x)\end{array}\right.$

6) $\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) & \to & \mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})\\ f & \mapsto & f'+5f\end{array}\right.$

Exercice 2 (*)
Cette application est-elle $\mathbf{R}$-linéaire ?

$$f\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \to & \mathbf{C}\\ x & \mapsto & ix.\end{array}\right.$$

Exercice 3 (*)
Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x+y, x-y)$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbf{R}^2$ et donner sa réciproque.

Exercice 4 (*)
Donner l'image et le noyau de

1) $(x,y) \mapsto (x+3y, x-3y)$

2) $(x,y) \mapsto (x, y, x+y)$

3) $(x,y,z) \mapsto (x+y+2z, 2x-3y+z)$

4) $(x,y,z) \mapsto (x-y+z, x+5y-z, 2x+2y+3z)$

5) $(x,y,z,t) \mapsto (x-y-z+t, x+2y+z-t, 3x-z+t, 2x-y+t)$

Exercice 5
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1) Montrer que la donnée $\begin{cases}\varphi(e_1) & = e_1+e_2\\ \varphi(e_2) & = e_1-e_2\\ \varphi(e_3) & = e_1+\lambda e_3\end{cases}$ définit un unique endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$.

2) Soit $x = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. Calculer $\varphi(x)$.

3) Quelle valeur donner à λ pour que φ soit injective ? soit surjective ?

Exercice 6
Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{R}^4$
Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbf{R}^4$ tel que

- $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$
- $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$
- $\ker f = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4,\ \text{tels que}\ \ x+2y+z = 0 \text{ et } x+3y-t = 0\}.$

Indication : on pourra chercher une base de $\ker f$

2 Images et noyaux

Exercice 7 (*)
Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes.

1) $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & y\end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x+y\end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y,z)\end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y,z)\end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y-z,x+y+z)\end{array}\right.$

Exercice 8
Donner une famille génératrice du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par

$$\left\{(5x+3y-2z,x+y,z,x-y+2z) \mid (x,y,z)\in\mathbf{R}^3\right\}$$

Interpréter cet espace comme le noyau d'une application linéaire.

Exercice 9 (*)
Écrire les espaces suivants comme des images d'applications linéaires.

1) $E=\operatorname{Vect}(1,1),(1,2)$
2) $E=\operatorname{Vect}(1,2,1)$
3) $E=\operatorname{Vect}(1,2,1),(5,1,2)$

Exercice 10 (*)

$$f:(x,y,z)\mapsto(ax+y+z,ax+ay+z,x+ay+az).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, pour que l'application soit injective/surjective/bijective.

Exercice 11 (**)
Soient $(f,g)\in(\mathscr{L}(E))^2$. Montrer que si f et g commutent, alors $\ker(g)$ et $\operatorname{Im}(g)$ sont stables par f.

Exercice 12 (**)
Soient E,F,G trois espaces vectoriels, $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $g\in\mathscr{L}(F,G)$.
Les deux questions sont indépendantes.

1) Interpréter la proposition "$g\circ f=0_{\mathscr{L}(E,G)}$" avec $\operatorname{Im} f$ et $\ker g$.
2) Montrer que $f(\ker(g\circ f))=\ker g\cap\operatorname{Im} f$.

3 Rang

Exercice 13 (*)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, V un sous-espace vectoriel de E et $f\in\mathscr{L}(E)$.
Montrer que $V\subset f(V)\Rightarrow f(V)=V$

Exercice 14 (**)
Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ avec E un espace de dimension $n\geqslant 1$.
On définit pour tout $k\in\mathbf{N}$, $d_k=\dim\left(\ker f^{k+1}\right)-\dim\left(\ker f^k\right)$.

1) Montrer que

$$\forall k\in\mathbf{N},\ \operatorname{rg} f^{k+1}=\operatorname{rg} f^k-\dim\left(\operatorname{Im} f^k\cap\ker f\right).$$

2) En déduire que la suite (d_k) est décroissante.

Exercice 15 (**)
Soit E de dimension finie n, et $f\in\mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\left(\ker f=\operatorname{Im} f\right)\iff\left(f^2=0 \text{ et } n=2\operatorname{rg} f\right).$$

Exercice 16 (**)
Soit E de dimension finie, et $f,g\in\mathscr{L}(E)$, montrer que

$$\operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g)-n\leqslant\operatorname{rg}(fg)\leqslant\min\{\operatorname{rg}(f),\operatorname{rg}(g)\}.$$

Exercice 17 (**)
Soit E un espace vectoriel, $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg} f=1$.
Montrer qu'il existe un unique $\lambda\in\mathbf{K}$ tel que $f^2=\lambda f$.

4 Endomophismes particuliers

Exercice 18
Soit $F = \left\{(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbf{K}^4,\, x+y-z+t = y+t = 0\right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^4$, l'ecrire comme intersection de noyaux de formes linéaires.
Soit $G = \text{Vect}\left((1,\, 1,\, 1,\, 1),\, (1,\, 1,\, -1,\, 1)\right)$.
Montrer que $F \oplus G = \mathbf{K}^4$.
Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.

Exercice 19
Déterminer l'expression de la projection sur $F = \text{Vect}\left((0,\, 1,\, -1)\right)$ parallèlement au plan $G = \text{Vect}\left((1,\, 0,\, 0),\, (1,\, 1,\, 1)\right)$.

Exercice 20 (**)
On pose $E = \mathbf{R}^3$ et on définit

$$F = \{(x, y, z) \in E \text{ tel que } x + z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in E \text{ tel que } x = 2y = z\}.$$

1) Montrer que F et G sont deux espaces supplémentaires dans E.
2) Calculer la projection du vecteur (x, y, z) sur F parallèlement à G
3) Calculer la symétrie du vecteur (x, y, z) par rapport à F parallèlement à G

Exercice 21 (***)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, f, g deux endomorphismes de E vérifiant $f \circ g = 0$ et $f + g$ inversible.
Montrer que $\text{rg}\,(f) + \text{rg}\,(g) = n$.

Exercice 22 (**)
Soit $E = \mathbf{K}[X]$. On pose $Q = (X-1)(X+2)$. Pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$, on note $u(P)$ le reste de la division euclidienne de P par Q.
Montrer que u est un projecteur dont on déterminera le noyau et l'image.

Exercice 23 (***)
Soit E un espace de dimension finie.
Montrer que les homothéties sont les seuls endomorphismes qui commutent avec tous les autres (pour la loi $\circ$).

Exercice 24 (***)
Soit E de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer qu'il existe $g \in \text{GL}(E)$ et p un projecteur de E tel que $f = g \circ p$.

5 Formes linéaires

Exercice 25 (*)
Soit E un espace vectoriel et $f \in E^*$.
Montrer que si $f \neq 0$, alors f est surjective.

Exercice 26 (**)
Soit E un espace vectoriel et $f,\, g$, deux formes linéaires sur E.
Montrer que si, $\forall x \in E,\; f(x)g(x) = 0$,
alors $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 27 (**)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.
On note $(\varphi_1,\, \cdots,\, \varphi_n)$ une base de E^* l'ensemble des formes linéaires sur E.

1) Montrer que $\bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i = \{0\}$.
2) Montrer il existe une unique famille de vecteurs $(f_i)_{i \in [\![1,\, n]\!]} \in E^n$ dont la famille $(\varphi_i)_{i \in [\![1,\, n]\!]}$ est la base duale.
On l'appelle la base anté-duale de (φ_i).
3) Soit $(e_1,\, \cdots,\, e_n)$ une base de E.
On note $(e_i^*)_{i \in [\![1,\, n]\!]}$ sa base duale.
Montrer que la base anté-duale de $(e_i^*)_{i \in [\![1,\, n]\!]}$ est exactement la base $(e_i)_{i \in [\![1,\, n]\!]}$.
4) Si $E = \mathbf{K}_n[X]$, $(a_0,\, \cdots,\, a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ deux à deux distincts.
Pour tout $i \in [\![0,\, n]\!]$ on note $\varphi_i\ : P \mapsto P(a_i)$.
Montrer que $(\varphi_i)_{i \in [\![0,\, n]\!]}$ est une base de $(\mathbf{K}_n[X])^*$ et donner sa base anté-duale.

6 Entraînement

Exercice 28 (*)
Pour $n \in \mathbf{N}*$, on définit l'application

$$u : \begin{cases} \mathbf{R}_n[X] & \to \mathbf{R}_n[X] \\ P & \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

1) Justifier que $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}_n[X])$
2) Déterminer le noyau de u.
3) Montrer que $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathbf{R}_{n-1}[X]$.
4) Déterminer $\mathrm{Im}\,(u)$.

Exercice 29 (**)
Soit ψ, l'application de $E = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), f(0) = 0\}$, dans lui-même définie par

$$\forall f \in E, \quad \psi(f) : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que E est un espace vectoriel.
2) Montrer que ψ est un endomorphisme de E.
3) Montrer que ψ n'est pas un automorphisme de E.

Exercice 30 (**)
Soient f et g deux endomorphismes de E.
Montrer que f et g sont inversibles si et seulement si $f \circ g$ et $g \circ f$ le sont.

Exercice 31 (**)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$.
Montrer que $\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(f^2) \leqslant \dim E$.

Exercice 32 (***)
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose que

$$\forall x \in E,\ \exists \lambda \in \mathbf{K},\ f(x) = \lambda x.$$

Montrer que $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ \forall x \in E,\ f(x) = \lambda x$.

Exercice 33 (***)
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ injective.
Montrer que pour tout famille $(x_1, ..., x_p)$ de vecteurs de E, on a

$$\mathrm{rg}\,(f(x_1), ..., f(x_p)) = \mathrm{rg}\,(x_1, ..., x_p).$$

7 Exercices CCINP

Exercice 34 (CCINP 55)
Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbf{C}^2$.

1) (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2) Dans cette question, on considère la suite de E définie par: $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication: discuter suivant les valeurs de a.

Exercice 35 (CCINP 60)
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2\,(\mathbf{R})$ défini par : $f\,(M) = AM$.

1) Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2) f est-il surjectif ?
3) Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4) A-t-on $\mathscr{M}_2\,(\mathbf{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

Exercice 36 (CCINP Exercice 62 - extrait)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1) Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2) Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
3) Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

Exercice 37 (CCINP 64)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1) Démontrer que: $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2) (a) Démontrer que: $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que: $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Exercice 38 (CCINP 71)
Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

1) Vérifier que $\mathbf{R}^3 = P \oplus D$.

2) Soit p la projection vectorielle de $\mathbf{R}^3$ sur P parallèlement à D.
Soit $u=(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

3) Déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 39 (CCINP 87)
Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1) Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(a_i)=b_i.$$

2) Soit $k\in[\![0,n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\quad b_i=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad i\neq k \\ 1 & \text{si} \quad i=k \end{cases}$$

3) Prouver que $\forall p\in[\![0,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Exercice 40 (CCINP 90)
$\mathbf{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbf{K}$.

1) Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1),P(a_2),P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2) On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbf{K}^3$
et on pose $\forall k\in\{1,2,3\},\ L_k=\Phi^{-1}(e_k)$.

   (a) Justifier que (L_1,L_2,L_3) est une base de $\mathbf{K}_2[X]$.

   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3) Soit $P\in\mathbf{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1,L_2,L_3).

4) **Application** : on se place dans $\mathbf{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.

Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.