Variables aléatoires dénombrables

1 Pour commencer

Exercice 1 (*)
Un athlète fait du saut en hauteur.
On numérote les sauts dans l'ordre 1, 2, $\cdots$, n, $\cdots$.
On suppose que la probabilité de réussir le saut n est $\frac{1}{n}$.
L'athlète effectue les sauts dans l'ordre et s'arrête au premier échec.

1. Quelle est la probabilité p_n qu'il s'arrête exactement après le n-ième saut ?
2. Montrer que la série $\sum p_n$ converge et calculer $\sum_{n\geqslant 1} p_n$. Interpréter ce résultat.
3. Quelle est la probabilité que l'athlète n'ait pas le droit de tenter le 2e saut, le 3e...
4. En moyenne, combien effectue-t-il de sauts ?

Exercice 2 (*)
Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On fait des tirages successifs et le jeu s'arrête dès que l'on tire la boule rouge.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages réalisés avant d'arrêter. Par exemple, si on tire la boule rouge au premier tirage, $X = 1$.

1. Si on effectue des tirages sans remise, donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Si on effectue des tirages avec remise, donner la loi de X, son espérance et sa variance.
3. Désormais, on suppose qu'à chaque fois que l'on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne, ainsi qu'une autre boule blanche.
   (a) Donner la probabilité de $[X = n]$, en fonction de n.
   (b) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(X = n)$ converge-t-elle ? si oui, quelle est sa somme ?
   (c) Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?
   (d) X admet-elle une espérance ? si oui, laquelle.

2 Lois quelconques

Exercice 3 (*)
Soient a et k deux réels avec $a \neq -1$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit $p_n = k\left(\dfrac{a}{a+1}\right)^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et k pour que la suite (p_n) définisse une loi de probabilité dans $\mathbf{N}$.
Dans ce cas, donner son espérance.

Exercice 4 (*)
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbf{N}^*$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall (i,j) \in (\mathbf{N}^*)^2, \qquad \mathbf{P}\left([X=i]\cap[Y=j]\right) = \frac{a}{2^{i+j}}.$$

1. Donner la valeur nécessaire de a.
2. Donner les lois marginales de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5 (**)
Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω et f une fonction définie sur $x(\Omega)$.
À quelle condition, les variables X et $f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 (Variante de Bienaymé)
Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance m et une variance σ^2. On pose $\alpha > 0$.

1. Soit $\lambda > 0$, montrer que
$$\mathbf{P}\left(X - m \geqslant \alpha\right) \leqslant \frac{\sigma^2+\lambda^2}{(\alpha+\lambda)^2}.$$
On pourra remarquer que
$\mathbf{P}\left(X - m \geqslant \alpha\right) = \mathbf{P}\left(X - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda\right)$.
2. En déduire qu'un majorant « optimal » de $\mathbf{P}\left(X - m \geqslant \alpha\right)$ qui ne dépende que de σ^2 et α est $\dfrac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$.
3. Montrer que
$$\mathbf{P}\left(|X - m| \geqslant \alpha\right) \leqslant \frac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}.$$
4. À quelles conditions cette inégalité est-elle meilleure que celle de Bienaymé-Tchebychev ?

Exercice 7 (***)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que X admet une espérance si et seulement si $\sum \mathbf{P}(X \geqslant k)$ converge et que, dans ce cas,

$$\mathbf{E}\left(X\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(X \geqslant k\right).$$

3 Lois de Poisson

Exercice 8 (*)
Un promeneur ramasse des champignons. Chaque fois qu'il en ramasse un, il s'agit d'une morille avec la probabilité $p \in]0,1[$, et d'un bolet avec la probabilité $q = 1-p$ (indépendamment des ramassages précédents).
Soit X la variable aléatoire « nombre de morilles ramassées » et Y la variable aléatoire « nombre de bolets ramassés ».
On note $N = X + Y$ et on suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ : $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Calculer la loi conjointe du couple (N, X).
2. En déduire la loi de X.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 (**)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
Donner la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 10 (***)
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Alexandre et Béatrice font un pari :

- Si $X = 0$, la partie est nulle.
- Si X est impair, alors Alexandre gagne et Béatrice lui donne X euros.
- Si X est pair et supérieur ou égal à 2, Béatrice gagne et Alexandre lui donne X euros.

1. On note p la probabilité qu'Alexandre gagne, et q celle que Béatrice gagne.
   Calculer $p + q$ et $p - q$ et en déduire p et q.
2. Qui a le plus de chance de gagner ?
3. Déterminer l'espérance des gains de chacun.

Exercice 11 (***)
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Trouver le mode de X, c'est-à-dire la valeur de k telle que $\mathbf{P}(X = k)$ est maximal.

4 Lois géométriques

Exercice 12 (*)
X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On note $Z = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 13 (**)
X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Trouver la loi de $X - Y$.

Exercice 14 (**)
Soit $p \in]0,1[$, on pose $q = 1 - p$.
X est une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p.
On définit la variable aléatoire Y par $Y = 0$ si X est pair, et $Y = 1$ sinon.
Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

5 Mises en situation

Exercice 15 (*)
On joue avec deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6 (dés non pipés).
On jette un premier dé. On jette ensuite le deuxième dé jusqu'à ce qu'il indique le même numéro que le premier.
Soit X le nombre de fois qu'il faut lancer le deuxième dé pour qu'il indique le même numéro que le premier.

1. Établir la loi de probabilité de X.
2. Calculer son espérance mathématique et sa variance.

Exercice 16 (**)
Un ivrogne essaie de rentrer chez lui après un passage au bar. À chaque pas, il a une chance sur dix de tomber.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de pas que fait l'ivrogne avant de tomber.

1. Établir la loi de probabilité de X.
2. À quelle distance maximale doit être la maison de l'ivrogne pour qu'il y arrive avec une probabilité supérieur à $0,5$?

Exercice 17 (***)
Deux joueurs A et B jouent avec un dé équilibré chacun leur tour. A commence. Le joueur gagne s'il obtient le 6 et le jeu s'arrête.

1. Quelle est la probabilité que A gagne ?
   On note X le numéro du lancé auquel apparaît le premier 6. La personne qui gagne reçoit alors X euros de la part de l'autre.
   Par exemple pour les lancés successifs :

6	A gagne et reçoit 1 euro de B
$2-6$	B gagne et reçoit 2 euro de A
$2-5-1-6$	B gagne et reçoit 4 euro de B

2. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
3. Calculer l'espérance de gain de A et de B.

Exercice 18 (**)
Pour avoir son diplôme, un étudiant doit réussir ses examens dans les M cours qui sont proposés, et obtenir ainsi les M unités de valeur correspondantes. On suppose que l'étudiant a une probabilité $p \in]0,1[$ de réussir chacun des examens (toutes les tentatives sont supposées indépendantes). D'année en année, l'étudiant peut reporter les unités de valeur obtenues, et il ne passe alors que les examens qu'il n'a pas réussis.

1. Pour $1 \leqslant i \leqslant M$, notons G_i le nombre d'essais nécessaires pour réussir l'examen du i-ème cours. Quelle est la loi de G_i ?
2. On note X_n le nombre total d'unités obtenues pendant les n premières années (si $X_n = M$, alors $X_m = M$ pour $m \geqslant n$). Quelle est la loi de X_n ?
3. On suppose que l'étudiant ne peut passer les examens qu'au plus pendant 5 ans.
   (a) Quelle est la probabilité que l'étudiant n'obtienne pas son examen ?
   (b) Combien d'examens l'étudiant passera-t-il en moyenne ?

Exercice 19 (**)
On lance un dé équilibré et on note X le numéro du lancer où apparaît un six pour la deuxième fois.

1. Donner $X(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in X(\Omega)$, calculer $\mathbf{P}(X = k)$.
3. X admet-elle une espérance, si oui, laquelle.

Exercice 20 (**)
On dispose d'une pièce truquée qui renvoie « pile » avec la probabilité $p \in]0,1[$. John von Neumann a imaginé un algorithme pour simuler le lancer d'une pièce équilibré avec celle-ci.
À chaque double lancer,

1. si on obtient « pile-face » : on renvoie « face ».
2. si on obtient « face-pile » : on renvoie « pile ».
3. sinon, on recommence.

Tous les lancers successifs se font indépendamment.
On note $T \in (2, 4, 6, \cdots)$ la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que l'algorithme se termine, et $\mathbf{R} \in \{P, F\}$ le résultat de l'algorithme (on note P pour « pile » et F pour « face »).

1. Que valent T et R si on obtient comme premiers tirages : $PPPPFFPPPFFP$?
2. Démontrer que pour tout $k \geqslant 1$,
$$\mathbf{P}(T = 2k) = \left(p^2 + (1-p)^2\right)^{k-1} 2p(1-p).$$
   En déduire que l'algorithme se termine presque-sûrement, c'est-à-dire que $\mathbf{P}(T < +\infty) = 1$.
3. Démontrer que l'algorithme renvoie bien « pile » ou « face » avec la même probabilité, c'est-à-dire que $\mathbf{P}(R = P) = \frac{1}{2}$.
4. Calculer $\mathbf{E}(T)$.

Exercice 21 (**)
Soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des nombres réels tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, et $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$.
On pose
$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i.$$
Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $c > 0$, on a $\mathbf{P}(|S| \geqslant c) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a
$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.$$
   Indication, on pourra utiliser le fait que $\mathrm{e}^u = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \frac{u^i}{i!}$ *pour tout* $u \in \mathbf{R}$.
2. Montrer que pour tout $c > 0$, on a $\mathbf{P}(S \geqslant c) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.
3. En déduire que $\mathbf{P}(|S| \geqslant c) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2}}$.

Exercice 22 (***)
On joue à pile ou face. La probabilité d'obtenir pile est p avec $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$. X_r est le nombre de lancers nécessaires pour obtenir r piles, $r \in \mathbf{N}^*$.

1. Déterminer la loi de X_r.
2. On note $T_r = X_{r+1} - X_r$. Déterminer la loi de T_r.
3. En déduire $\mathbf{E}(X_r)$.