Analyse asymptotique

Notation : $DL_k(x)$ désigne le développement limité à l'ordre k en x.

1 Calculs

Exercice 1 (*)
Faire un développement limité de

1) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
2) $DL_3(0)$ de $\ln(1+\sin x)$
3) $DL_3(1)$ de $\cos(\ln(x))$
4) $DL_6(0)$ de $\ln(\cos x)$
5) $DL_7(0)$ de $\sin(\operatorname{Arctan}(x))$
6) $DL_4(1)$ de $(\ln x)^2$
7) $DL_3(0)$ de $e^{\sin x}$
8) $DL_8(0)$ de $\sin^6 x$
9) $DL_2(0)$ de $\dfrac{\operatorname{Arctan} x - x}{\sin x - x}$
10) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$
11) $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $\ln \sin x$
12) $DL_3(0)$ de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2 (*)
Déterminer les développements limités suivants :

1) $DL_3(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$.
2) $DL_2(0)$ de $\frac{\operatorname{Arctan} x}{\tan x}$.
3) $DL_2(1)$ de $\frac{x-1}{\ln x}$.

Exercice 3 (**)
Donner le développement à l'ordre 5 en 0 de Arcsin par les deux méthodes suivantes

1) $\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2) $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$ pour $x \in [-1;1]$

Exercice 4 (**) (Équivalent simple)
Donner une équivalent simple en 0 de

1) $\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)$.
2) $(1+\sin x)^x - (1+x)^{\sin x}$.

2 Développements asymptotiques

Exercice 5 (*)
Réaliser un développement asymptotique en $+\infty$ de

1) $x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right)$ à 2 termes
2) $\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x}$ à 2 termes.

Exercice 6 (*)
Réaliser un développement asymptotique en $+\infty$ de

1) $\sqrt{x+1}$ à la précision $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.
2) $x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x)$ à la précision $\frac{1}{x^2}$.
3) $\operatorname{Arctan}(x)$ à la précision $\frac{1}{x^3}$.

3 Applications aux études de fonctions

Exercice 7 (*) (Passage au logarithme)
Soient f, g deux applications strictement positives au voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$ telles que $f \sim_a g$.
On suppose que f admet une limite en a, notée $L \in \overline{\mathbf{R}}$ telle que $L \neq 1$

1) Montrer que $\ln(f) \sim_a \ln(g)$.
2) Montrer que le résultat est faux pour $L = 1$.

Exercice 8 (*)
Soit $f :]-1,0[\cup]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}.$$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point ?

Exercice 9 (*)
Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$$

peut être prolongée en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

Exercice 10 (**)
Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $a \in \mathbf{R}$.
Étudier la limite en 0 de

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

Exercice 11 (**)
Soient a un réel non nul et f la fonction définie au voisinage de 0 par

$$f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}.$$

Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.
Un point d'inflexion est un changement de sens de courbure de la courbe.

Exercice 12 (**)
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

Étudier les branches infinies de f et donner la position des asymptotes par rapport à la courbe.

Exercice 13 (**)
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Étudier la branche infinie de f en $+\infty$ et donner la position des éventuelles asymptotes par rapport à la courbe.

Exercice 14 (**)
Étudier les branches infinies des fonctions suivantes.

1) $f\ : x \mapsto x^2 \mathrm{Arctan}\left(1+x^2\right).$

2) $f\ : x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}.$

4 Développements implicites

Exercice 15 (**) (Étude locale d'une réciproque)
Montrer que l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ admet une application réciproque définie sur $\mathbf{R}$ et former le $DL_5(0)$ de f^{-1}.

Exercice 16 (***)
Pour $\lambda > 0$ on définit

$$f_\lambda\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{1/x}. \end{array}\right.$$

1) Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = 1$ admet une unique solution x_λ.

2) Donner un développement asymptotique à trois termes de x_λ quand $\lambda \to +\infty$.

5 Entraînement

Exercice 17 (*)
Calculer les limites des expressions suivantes (si elles existent).

1) $(\tan(x))^{\tan(2x)}$ en $\frac{\pi}{4}$.

2) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ en 0.

3) $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x}$ en 0.

4) $\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$ en 1.

5) $\dfrac{1}{\sin^4(x)}\left(\sin\left(\dfrac{x}{1-x} - \dfrac{\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)\right)$ en 0.

6) $\dfrac{(1+x)^{\frac{\ln(x)}{x}} - x}{x(x^x - 1)}$ en 0.

Exercice 18 (*)
Proposé par Rywann, 2021
Existe-il $\eta > 0$, $n \in \mathbf{N}$ et $(a_i)_{i \in [\![0,\, n]\!]}$ tel que

$$\forall x \in]-\eta, \eta[,\ \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

En d'autres termes, peut-on, pour un ordre assez grand, trouver un développement limité exact de l'exponentielle sur un voisinage de 0 ?

Exercice 19 (**)
Déterminer les développements limités suivants :

1) $DL_{10}(0)$ de $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}.$

2) $DL_3(2\pi)$ de $\sin\sqrt{x^2-3\pi^2}$.

3) $DL_{100}(0)$ de $\ln\left(\sum_{k=0}^{98}\frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 20 (**)
Montrer qu'il existe deux réels a et b (que l'on calculera), tels qu'en $+\infty$ on ait

$$\int_0^1 \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = a+\frac{b}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 21 (***)
Soient $n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant 2$ et $f\ :\mathbf{R}_{\rightarrow}\mathbf{R}$ définie par

$$f(x)=x^n\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ \text{ si } x\neq 0 \text{ et } f(0)=0.$$

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

2) f admet-elle un développement limité en 0 ? si oui à quel ordre maximal ?

Exercice 22 (***)
Soit $t>0$.

1) Montrer que l'équation

$$x\,\mathrm{e}^x=\frac{1}{t}$$

admet une unique solution $x_t>0$.

2) Déterminer un développement asymptotique à trois termes de x_t quand $t\to+\infty$.

6 Exercices CCINP

Exercice 23 (CCINP 1)

1) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n=\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right)-\tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 24 (CCINP 46- extrait)
Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1}=n\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\frac{\pi}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
En déduire un développement asymptotique à la précision $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ en $+\infty$.