Espaces vectoriels

1 Caractérisation des espaces vectoriels

Exercice 1 (*)
Dire à chaque fois s'il s'agit d'un espace vectoriel, puis le démontrer.

1) $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2,\ \text{tel que } x = y\right\}.$
2) $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \text{tel que } 2x - 5y - 1 = 0\right\}.$
3) $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \text{tel que } 2xy = 0, x + y = 0\right\}.$
4) $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \text{tel que } (x-1)y = 0\right\}.$
5) $\left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ \text{tel que } x + y + z = 0, x - y + z = 0\right\}.$
6) $\{(x, 2x, 3x)\}_{x \in \mathbf{K}}.$
7) $\{(x, y, z),\ \text{tel que } \exists m \in \mathbf{R}, x = m(y+z)\}.$
8) Le disque unité de $\mathbf{R}^2$.
9) L'axe des abscisses de $\mathbf{R}^2$.
10) Les deux axes (abscisses et ordonnées) de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 2 (*)
Dire à chaque fois s'il s'agit d'un espace vectoriel, puis le démontrer.

1) Pour $P \in \mathbf{R}[X]$ fixé, les racines réelles de P.
2) $\{P \in \mathbf{K}[X],\ \text{tel que } P(0) = 0\}.$
3) $\{P \in \mathbf{K}_n[X],\ \text{tel que } P(0) = 1\}.$
4) $\{P \in \mathbf{K}_n[X],\ \text{tel que } P(0) = 0 \text{ ou } P(1) = 0\}.$
5) $\{P \in \mathbf{K}_n[X],\ \text{tel que } P(0) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}.$
6) $\{P \in \mathbf{K}_n[X],\ \text{tel que } P(0) = 1 \text{ et } P(1) = 0\}.$
7) $\{P \in \mathbf{K}_n[X],\ \text{tel que } P \text{ est scindé}\}.$
8) $\{P \in \mathbf{K}[X],\ \text{tel que } \deg P \geqslant 3\}.$

Exercice 3 (*)
Dire à chaque fois s'il s'agit d'un espace vectoriel, puis le démontrer.

1) Pour $n \geqslant 1$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures réelles d'ordre n.
2) Pour $n \geqslant 1$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures réelles d'ordre n à coefficients strictement positifs.
3) L'ensemble des suites qui convergent.
4) L'ensemble des suites qui divergent.
5) Pour $T > 0$ fixé, l'ensemble des fonctions T-périodiques.
6) Pour I un intervalle donné et $k \in \mathbf{N}$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Exercice 4 (**)
Soient $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$,
F l'ensemble des applications croissantes sur $\mathbf{R}$,
et G l'ensemble des applications décroissantes sur $\mathbf{R}$.

1) F et G sont-ils tous deux des sous-espaces vectoriels de E ?
2) L'ensemble des applications qui sont sommes d'une application croissante et d'une application décroissante est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 5 (**)
L'ensemble
$$\left\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ \left(u_n^2\right) \text{ converge}\right\}$$
est-il un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$?

2 Familles libres

2.1 Familles finies

Exercice 6 (*)
Soient dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (1,1,0), \quad v_2 = (4,1,4) \quad \text{et} \quad v_3 = (2,-1,4).$$

1) Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.
Faire de même avec v_1 et v_3, puis avec v_2 et v_3.

2) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 7 (*)
La famille $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \ln x$ est-elle libre dans l'espace vectoriel des applications de $]0;+\infty[$ dans $\mathbf{R}$?

Exercice 8 (*)
Soit $a \in \mathbf{R}$. $u = (a,1,1)$, $v = (1,a,1)$ et $w = (1,1,a)$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que (u,v,w) soit libre dans $\mathbf{K}^3$.

Exercice 9 (**)
On considère une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants (e_1, e_2, e_3, e_4).
Les familles suivantes sont-elles libres :

1) $(e_1, 2e_2, e_3)$.

2) (e_1, e_3).

3) $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$.

4) $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$.

5) $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$.

6) $(e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3, e_1 + 2e_2 - e_4, 3e_1 - e_2 + e_3)$.

2.2 Familles infinies

Exercice 10 (**) (méthode)
Montrer que $\left\{t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t},\ \lambda \in \mathbf{R}\right\}$ est une famille libre de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Exercice 11 (**) (méthode)
Montrer la liberté de $(x \mapsto \sin^n(x))_{n \in \mathbf{N}}$.

2.3 Exercices théoriques

Exercice 12 (**)
Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre de E.
Montrer que

$$a \notin \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_p) \Rightarrow (e_1 + a, ..., e_p + a) \text{ est libre.}$$

Exercice 13 (**) (Lemme d'échange)
Soient $(e_1, ..., e_n)$ et $(e'_1, ..., e'_n)$ deux bases d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.
Montrer qu'il existe $j \in \{1, ..., n\}$ tel que la famille $(e_1, ..., e_{n-1}, e'_j)$ soit encore une base de E.

2.4 Pour s'entraîner

Exercice 14
Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ?

1) $(1,1,0)$, $(1,0,-1)$, $(1,2,1)$ dans $\mathbf{R}^3$.

2) $(1,1,0,0)$, $(1,0,-1,1)$, $(1,2,1,0)$ dans $\mathbf{R}^4$.

3) $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^4$ dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Exercice 15 (*)
Les familles suivantes sont-elles libres ?

1) $(1,1,1)$, $(2,2,2)$ dans $\mathbf{K}^3$.

2) $(1,0,1)$, $(2,2,2)$ dans $\mathbf{K}^3$.

3) $(1,0,1)$, $(0,2,2)$, $(3,3,0)$ dans $\mathbf{K}^3$.

4) $(1,2,5)$, $(-1,2,-2)$, $(-1,6,1)$ dans $\mathbf{K}^3$.

Exercice 16 (**)
Montrer que les suites réelles $(1)_{n \in \mathbf{N}}$, $(n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(\mathrm{e}^n)_{n \in \mathbf{N}}$ forment une famille libre de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

3 Familles génératrices et bases

3.1 Pour commencer

Exercice 17

1) Donner un exemple d'une famille qui est libre lorsque l'espace est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel mais liée lorsque c'est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

2) On pose $e_1 = (-1, 1, 1)$, $e_2 = (1, -1, 1)$ et $e_3 = (1, 1, -1)$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et donner les coordonnées de $(8, 4, 2)$ dans cette base.

3) (a, b) liée $\Rightarrow b \in \text{Vect}\,(a)$?

4) Soient a, b, c trois vecteurs non nuls.
(a, b, c) liée $\Rightarrow c \in \text{Vect}\,(a, b)$?

Exercice 18 (*)
Soit $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$.
À quelles conditions sur $(x, y) \in \mathbf{K}^2$, le vecteur $u = (-2, x, y, 3)$ appartient-il à $\text{Vect}\,(e_1, e_2)$?

Exercice 19 (**)

1) $(4, 5, 1)$ est-il une combinaison linéaire de $(2, 3, 0)$ et $(1, 1, 0)$?

2) Décrire le $\mathbf{R}-$espace vectoriel engendré par $(0, 1, 1)$ et $(0, 1, 0)$.

Exercice 20 (*)
Montrer que $\left(X^2, (X+1)^2, (X-1)^2\right)$ est une base de $\mathbf{K}_2[X]$ et donner les coordonnées de $(X+2)^2$ dans cette base.

3.2 Pour s'entraîner

Exercice 21 (*)
Parmi les familles suivantes, lesquelles sont génératrices de $\mathbf{R}^3$?

1) $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2))$.

2) $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$.

3) $((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$.

4) $((1, 0, 3), (0, 2, 1), (3, 1, 1), (2, 1, -1))$.

Exercice 22 (*)
Montrer que la famille $(2, 1, 1)$, $(1, 4, 3)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ forme une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$.
Trouver une base extraite de cette famille.

4 Espace $\mathbf{K}^n$

4.1 Égalité d'espaces

Exercice 23 (*)
Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ suivants :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\right\}$$
$$G = \text{Vect}\left((1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1), (5, -3, -2, 5)\right).$$

1) Calculer la dimension de F.

2) Montrer que $G \subset F$.

3) Montrer que $G = F$.

Exercice 24 (**)
Montrer que dans $\mathbf{R}^3$,

$$\text{Vect}\,((2, 3, -1), (1, -1, -2)) = \text{Vect}\,((3, 7, 0), (5, 0, -7))\,.$$

Exercice 25 (**)
Dans $\mathbf{R}^3$, les deux espaces $F_1 = \text{Vect}\,((1, 2, 3), (3, 2, 1))$, et $F_2 = \text{Vect}\,((1, 0, -1), (2, 4, 6))$ sont-ils égaux ?

4.2 Familles de $\mathbf{K}^n$

Exercice 26 (*)
Soient $v_1 = (2, -1, -1)$, $v_2 = (-1, 2, 3)$, $v_3 = (1, 4, 7)$ et $v_4 = (1, 1, 2)$.
On pose $F = \text{Vect}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

1) Montrer sans calcul que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est liée.

2) Quelle est la dimension de F.

3) Extraire de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) une sous famille libre de cardinal maximal.

4) Compléter cette base en une base de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 27 (*)

1) Donner le rang de la famille :

$$S = \left\{u_1 = (1, 2, 1, 0), u_2 = (-1, 1, 1, 1), u_3 = (2, -1, 0, 1), u_4 = (2, 2, 2, 2)\right\}.$$

2) À partir d'une famille libre extraite de S, la compléter pour obtenir une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 28 (**)
Dans $\mathbf{K}^4$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1,1,1,1) \qquad v_2 = (1,2,3,4) \qquad v_3 = (3,1,4,2)$$
$$v_4 = (10,4,13,7) \qquad v_5 = (1,7,8,14)$$

1) La famille de ces cinq vecteurs est-elle libre ?

2) Quel est son rang ?

3) Extraire de cette famille une base $\mathscr{E}$ de $F = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.

4) À quelle condition le vecteur (x_1, x_2, x_3, x_4) appartient-il à F ?

5) Compléter la famille $\mathscr{E}$ en une base de $\mathbf{K}^4$.

Exercice 29 (**)
Soit $E = \left\{(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbf{R}^n,\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$.

1) Montrer que c'est un espace vectoriel.

2) Donner une base de E.

5 Espaces de polynômes

Exercice 30 (**) (à savoir refaire)
Soit $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ une famille de $\mathbf{R}_n[X]$ telle que $\forall i \in [\![0,n]\!],\ \deg P_i = i$.
Montrer que cette famille est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 31 (**) (cas général)

1) Soit $I \subset \mathbf{N}$, on considère une famille de polynômes $(P_i)_{i\in I} \in (\mathbf{K}[X])^I$ tous non nuls, telle que $\forall (i,\,j) \in I^2$, $\deg(P_i) = \deg(P_j) \Rightarrow i = j$.
Montrer que $(P_i)_{i\in I}$ est une famille libre.

2) On considère une famille de polynômes $(P_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que $\forall i \in \mathbf{N}$, $\deg(P_i) = i$.
Montrer que $(P_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$.

Exercice 32 (*)
Donner une famille génératrice de $\{P \in \mathbf{K}_3[X] \text{ tel que } P(0) = P'(0) = 0\}$.

Exercice 33 (*)
Pour $(x_1,\, \cdots,\, x_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1}$ deux à deux distincts, montrer que les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à cette famille forment une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Exercice 34 (**) (base)
Soit F défini par : $F = \left\{P \in \mathbf{R}_3[X],\ \int_0^1 P = 0\right\}$.

1) Montrer que F est un espace vectoriel.

2) Donner une base de F.

Exercice 35 (**)
Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on définit $P_i = \sum_{k=0}^{i} X^k$.

1) Montrer que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ forme une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

2) Exprimer la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$ dans la base $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$.

6 Autres espaces

Exercice 36 (**)

1) Donner une base et la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ (matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$).

2) Faire de même avec $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ (matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$).

3) Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.

Exercice 37 (*)

Dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, on considère les trois vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

1) Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

2) Donner les coordonnées de $\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 38 (**) (À savoir refaire)
Soient $p \in \mathbf{N}^*$ et E l'ensemble des suites réelles de période p.
Montrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
Donner la dimension de E et une base.

Exercice 39 (***)
Soit $E = \left\{x \mapsto A\sin(x+\varphi),\ (A,\,\varphi) \in \mathbf{R}^2\right\}$.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel des fonctions continues $\mathscr{C}^0(\mathbf{R},\,\mathbf{R})$.

2) Donner une base de E.

7 Somme d'espaces

Exercice 40 (*)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^5$ de dimension 3. Montrer que F et G ne peuvent pas être en somme directe dans $\mathbf{R}^5$.

Exercice 41 (*)

1) Montrer que $\mathbf{C}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et donner sa dimension.
2) Déterminer un supplémentaire de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ vu comme $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
3) Montrer a contrario, que $\mathbf{C} = \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ sur le corps $\mathbf{C}$.

Exercice 42 (*)
Soit F un plan de $\mathbf{R}^3$ et G une droite de $\mathbf{R}^3$.
Montrer que $G \not\subset F \iff F \oplus G = \mathbf{R}^3$.
Le résultat est-il encore vrai pour deux plans dans $\mathbf{R}^4$?

Exercice 43 (*)
Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$. On note F l'ensemble des applications paires et G l'ensemble des applications impaires.

1) Montrer que F et G sont deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels
2) Montrer que $E = F \oplus G$
3) Donner la décomposition de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ comme somme directe d'un élément de F et d'un élément de G.

Exercice 44 (**)
On pose $F = \left\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}},\ f(1) = 0\right\}$ et $G = \left\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}},\ \exists a \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = ax\right\}$.

Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Exercice 45 (**)
Dans $\mathbf{R}^3$, on considère

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x - y - 2z = 0\right\},$$
$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x = 2y = x + z\right\}.$$

1) Donner la dimension de F, puis celle de G.
2) Montrer que $F \oplus G = \mathbf{R}^3$.

Exercice 46 (**)
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, et H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Montrer que $F + G = F \oplus H$.

Exercice 47 (**)
Montrer que $F = \left\{f \in \mathbf{C}^0([0,1], \mathbf{R}),\ \text{tel que } \int_0^1 f = 0\right\}$ est un espace vectoriel.
Trouver *tous* les supplémentaires de F dans $\mathscr{C}^0\left([0, 1], \mathbf{R}\right)$.

8 Entraînement

Exercice 48 (**)
Soit $n \geqslant 1$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, on considère $E = \mathbf{R}_n[X]$.
On définit l'ensemble $F = \{P \in E,\ P(\alpha) = 0\}$, et les deux familles

$$\mathscr{C} = \left\{(X - \alpha)^k, k \in [\![1, n]\!]\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{B} = \left\{(X - \alpha)X^k, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

1) Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de F.
2) Quelle est la dimension de F ?
3) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F.
4) Donner les coordonnées de $(X - \alpha)^n$ dans la base $\mathscr{B}$.
5) Trouver un espace vectoriel G, tel que $F \oplus G = E$.

Exercice 49 (**)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $P \in \mathbf{R}_n[X]$ de degré exactement égal à n.
Montrer que $(P, P', P'', P^{(3)}, \dots, P^{(n)})$ forme une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 50 (**)
Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$ qui sont affines sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$.
Démontrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 51 (**)
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère

$$F = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4,\ b - 2c + d = 0\right\}$$
$$G = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4,\ a = d \text{ et } b = 2c\right\}$$

1) Donner une base de F, une base de G.
2) Donner une base de $F \cap G$.
3) Montrer que $F + G = \mathbf{R}^4$.

Exercice 52 (*)
Soient deux droites affines de $\mathbf{R}^n$, $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \emptyset$. Les droites sont-elles nécessairement parallèles (même direction) ? Discuter en fonction de n.

Exercice 53 (*)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^5$ de dimension 3.
Montrer que F et G ne peuvent pas être en somme directe dans $\mathbf{R}^5$.

Exercice 54 (**)
Soit E le sous-ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ défini par

$$E = \left\{ M(a,b,c)) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, \quad (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$$

1) Montrer que E est un espace vectoriel (pour la somme et le produit externe usuels).

2) Montrer que E est stable par produit matriciel.

3) Donner la dimension de E.

4) Soient $e_1 = M(1,0,0)$, $e_2 = M(0,1,0)$ et $e_3 = M(0,0,1)$.
On note $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$, montrer que c'est une base de E (si ça n'a pas déjà été fait).

5) Soit $u = M(1,1,1)$, $v = M(2,1,2)$, et $w = M(0,2,0)$.
Montrer que $\mathscr{B} = (u,v,w)$ est une base de E. et exprimer la famille $\mathscr{C}$ dans cette base.

Exercice 55 (*)
On considère l'ensemble E des vecteurs $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$ vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un espace vectoriel ?
Si oui, en donner une base.

Exercice 56 (*)
Parmi les familles suivantes, lesquelles sont génératrices de $\mathbf{R}^3$?

1) $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,2))$

2) $((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$

3) $((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$

4) $((1,0,3),(0,2,1),(3,1,1),(2,1,-1))$

9 Perfectionnement

Exercice 57 (**)
Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E (de dimension finie).
Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Exercice 58 (***)
E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel

1) Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E.
Montrer que $F \cup G$, est un espace vectoriel si, et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

2) Soient $F_1, F_2, \cdots F_n$ des sous espaces vectoriels de E.
Montrer que $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ est un espace vectoriel si, et seulement si l'un des F_i est égal à l'union.
Indication : Une droite affine qui coupe un espace vectoriel en au moins deux points est incluse dans cet espace.

Exercice 59 (***)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose

$$P_k = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X-i) = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

1) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$. est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

2) Montrer que $\forall x \in \mathbf{Z}, \forall k \in \mathbf{N}$, $P_k(x) \in \mathbf{Z}$.

3) Trouver tous les polynômes P tels que $\forall x \in \mathbf{Z}$, $P(x) \in \mathbf{Z}$.

Exercice 60 (***)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.
On pose $F = \bigcap_{i\in I} F_i$, montrer qu'il existe une partie finie $J \subset I$ telle que

$$F = \bigcap_{j\in J} F_j.$$