Variables aléatoires finies

Les applications numériques peuvent se faire à la calculatrice.

1 Pour commencer

Exercice 1 (*)
On propose le jeu suivant :
Pour pouvoir jouer, il faut d'abord verser 1€, puis on jette deux dés simultanément.

- Si l'un des dés au moins présente un chiffre impair, on ne gagne rien.
- Si les dés présentent deux chiffres pairs différents, on gagne 1€.
- Enfin, si les dés présentent le même chiffre pair, on gagne une somme égale au total des points des deux dés.

Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 2 (*) (Prédictions)
Madame Irma affirme qu'elle peut prédire le sexe des enfants à naître. Elle demande 5€ pour cette prédiction. De plus, en cas de prédiction erronée, elle s'engage à rembourser intégralement la somme perçue.
Si madame Irma trouve 1000 clients, quel gain moyen peut-on lui prédire ?

2 Exercices types

Exercice 3 (**) (Le bonneteau)
On dispose de n gobelets (opaques) mis à l'envers devant soi. Un billet se trouve sous l'un d'eux.
On retourne les gobelets un à un jusqu'à trouver le billet.
Quelle est la probabilité de trouver le billet au k-ième essai ?

Exercice 4 (**) (Transmission bruitée)
Une information est transmise sous forme d'une suite de 0 et de 1. L'existence d'un bruit lors du transport peut transformer un 1 en 0 et vice-versa avec une probabilité $1-p$. Le bruit agit de façon indépendante sur chaque caractère de la suite.
Pour se prémunir des effets du bruit, on transmet trois fois le même message. À la réception, s'il y a une majorité de 1, on considère que l'information est 1, sinon c'est 0.

1) Pour un message avec un seul caractère,
   (a) quelle est la probabilité que la réception soit juste ?
   (b) À quelle condition sur p, la fiabilité de réception est-elle meilleure avec un triple envoi qu'avec l'envoi simple ?
2) Pour un message à n caractères, quelle est la probabilité que le message soit juste ?
3) Quel est le nombre moyen de caractères justes à la réception pour une suite de n caractères.

Exercice 5 (**)
On s'intéresse à la proportion de personnes dans le monde qui vivent sous le seuil de pauvreté. On note p cette proportion.
Pour évaluer p, on sonde un nombre n de personnes prises au hasard et on obtient un nombre X de réponses favorables. On veut savoir combien de personnes on doit sonder pour réduire notre marge d'erreur dans l'estimation de p.
Donner une valeur de n à partir de laquelle la probabilité de l'événement $\left\{\left|\frac{X}{n}-p\right| \geqslant 0,05\right\}$ est inférieure à 10% ?

3 Entraînement

Exercice 6 (*)
Soit $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ avec $p \in]0,1[$, on pose $Y = \dfrac{1}{1+X}$.

1) Donner la loi de Y.
2) Montrer que $\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{n+1}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, avec $q = 1-p$

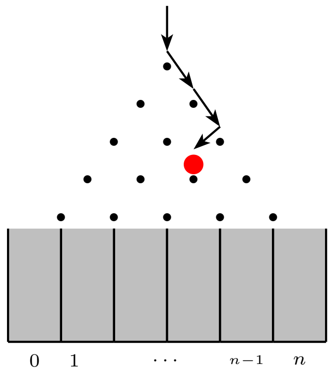
Exercice 7 (*)
Un sac contient n jetons ($n \geqslant 17$) dont 5 rouges et 10 blancs. Les autres sont verts. Un joueur tire un jeton au hasard.
S'il est rouge, il gagne 5€ ; s'il est blanc, il perd 3€ ; s'il est vert, il effectue un nouveau tirage sans remettre le jeton.
Si le second tirage donne un jeton rouge, il gagne 4€, s'il est blanc il perd 1€, s'il est encore vert la partie est nulle et s'arrête.
Soit X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur.

1) Établir en fonction de n la loi de probabilité de X.
2) Calculer $\mathbf{E}(X)$. Pour quelle valeur de n, le jeu est-il équitable ?

Exercice 8 (**)
Une urne contient six boules numérotées de 1 à 6. On en tire trois simultanément. Soit X la variable aléatoire égale au plus petit des nombres obtenus.

1) Établir la loi de X.
2) Calculer $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$ et σ(X).

Exercice 9 (**) (Planche de Galton)
La planche de Galton est une planche sur laquelle sont plantés des clous suivant un schéma pyramidal.
On fait tomber des billes qui ont pour chaque clou, autant de chance de passer à droite qu'à gauche.
En bas de la pyramide, chaque bille remplit un tube en fonction de la colonne d'arrivée.



On numérote de 0 à n (de gauche à droite) les tubes en bas de la pyramide.
On note X la variable aléatoire correspondant au tube d'arrivée de la boule.

1) Exprimer la valeur de X en fonction du trajet suivi par la boule, en déduire la loi de X.
2) Donner $\mathbf{E}(X), \mathbf{V}(X)$.

Exercice 10 (**)
Une urne contient b boules blanches, n boules noires.
On effectue des tirages successifs. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne en y rajoutant a boules de la même couleur.
On répète l'expérience à chaque tirage.
On note B_i l'événement « obtenir une boule blanche au tirage i », et
N_i l'événement « obtenir une boule noire au tirage i ».
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable de Bernoulli qui détermine si la boule tirée au rang i est blanche.
On considère pour $p \in [\![2, n]\!]$, la variable aléatoire Z_p, définie par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1) Que représente la variable Z_p ?
   Donner l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.
2) Donner la loi de X_1 et son espérance $\mathbf{E}(X_1)$.
3) Déterminer la loi de X_2 et son espérance $\mathbf{E}(X_2)$.
4) Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
5) Soit $p \leqslant n-1$.

(a) Déterminer $\mathbf{P}_{Z_p=k}(X_{p+1}=1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.

(b) En déduire que
$$\mathbf{P}(X_{p+1}=1) = \frac{b + a\mathbf{E}(Z_p)}{b+n+pa}.$$

(c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
Indication : On raisonnera par récurrence forte sur p.

6) Retrouver le même résultat par récurrence à l'aide des probabilités totales suivant X_1.

7) (a) Pour $p, q \in \mathbf{N}$, déterminer la probabilité d'obtenir d'abord p boules blanches puis q boules noires.
(b) Déterminer la probabilité d'obtenir exactement p boules blanches en $p+q$ tirages.
(c) Préciser cette valeur pour $b = n = a$.

Exercice 11 (***)

On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
On définit une suite $(U_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires avec $U_1 = 1$ et pour $i \geqslant 2$,

- $U_i = 1$ si au i-ème tirage, on obtient un numéro qui n'a été obtenu à aucun des $i-1$ tirages précédents,
- $U_i = 0$, sinon.

Pour $i \geqslant 1$, on définit T_i la variable aléatoire égale au numéro obtenu au i-ème tirage.

1) Donner la loi de U_2.

2) (a) Pour $i \geqslant 1$, donner la loi de T_i.
(b) À l'aide des probabilités totales, montrer que
$$\forall i \in \{2, \cdots, n\}, \mathbf{P}(U_i = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}.$$
(Vérifier que la cette formule reste valable pour $i = 1$.)

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note $V_k(n)$ la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.

3) (a) Exprimer $V_k(n)$ en fonction des variables U_i.
(b) En déduire l'espérance de $V_k(n)$.
(c) Calculer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(V_k(n))$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{E}(V_k(n))$.
Interpréter.

Exercice 12 (***) (QCM à un examen)

Un candidat doit passer un test par QCM comprenant 20 questions. Pour chaque question, le candidat a le choix entre deux réponses : une bonne et une mauvaise.
Les règles de notation sont les suivantes : une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse -1 point et une question laissée sans réponse rapporte 0 point. Le candidat est reçu s'il obtient au moins 10 points.
On suppose que le candidat connaît avec certitude les réponses aux 9 premières questions, mais n'a aucune idée des réponses aux 11 questions restantes.
Il choisit de répondre à k réponses parmi celles-ci.

1) Donner la probabilité qu'il soit reçu si $k = 1$, si $k = 2$.

2) On suppose k impair.
(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=\frac{k+1}{2}}^{k} \binom{k}{i} = 2^{k-1}$.
(b) Donner la probabilité que le candidat soit reçu.

3) Si k pair, donner la probabilité que le candidat soit reçu (en fonction de k).

4) En déduire la meilleure et la pire stratégie pour le candidat.

Exercice 13 (CCINP 109)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1) Déterminer la loi de X.

2) Déterminer la loi de Y.

4 Approfondissement

Exercice 14 (***)
On lance 6000 fois un dé et on obtient 1105 fois le nombre 6. Est-ce normal ?

Exercice 15 (***)
Dans ce jeu, vous êtes face à votre adversaire, autour d'une table. Chacun des deux joueurs doit initialement cacher ses mains sous la table, puis, brusquement, montrer l'une des deux.
Si chacun a montré la main droite, votre partenaire vous donne 3€.
Il vous en donne 2 si chacun a montré la main gauche.
Si, par contre, vous montrez la main droite et lui la gauche, donnez-lui 1€,
et si enfin, vous montrez la main gauche alors qu'il montre la droite, donnez-lui 4€.
Si vous jouez de nombreuses fois à ce jeu avec astuce (mais sans tricher), vous pouvez être sûr de gagner de l'argent.
Comment procédez-vous ?

Couples et vecteurs de variables aléatoires

1 Mises en situation

Exercice 16 (**)

1) On lance deux dés normaux, on note X_1 et X_2 leur résultats respectifs et $X = \max(X_1, X_2)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X sans calculer sa loi.
   (b) En déduire la loi de X.
   (c) Obtenir la loi de X directement par disjonction des cas selon les valeurs de X_1 et X_2.
2) De même avec 3 dés, donner la loi du maximum des trois.

Exercice 17 (**)
Dans une urne qui contient n jetons numérotés de 1 à n, on tire successivement (sans remise) deux jetons. On note X_1 le premier numéro, et X_2 le second numéro.

1) (a) Décrire l'univers image du couple (X_1, X_2).
   (b) Donner la loi du couple (X_1, X_2).
   (c) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X_1, X_2)$.
   (d) Les variables aléatoires sont-elles indépendantes.
2) On note $X = \min(X_1, X_2)$ et $Y = \max(X_1, X_2)$.
   (a) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   (b) Donner l'univers du couple (X, Y).
   (c) Déterminer la loi conjointe de (X, Y). Vérifier que l'on retrouve bien les lois marginales à partir de la loi conjointe.
3) On pose $Z = Y - X$.
   (a) Déterminer l'univers image de Z.
   (b) Déterminer la loi de Z.

Exercice 18 (*)
Un Boeing 787-8 transporte 230 passagers et leurs bagages. Il pèse 190 tonnes sans passagers ni bagages mais avec l'équipage et plein de carburant.
William, son commandant de bord, nous indique que les consignes de sécurité interdisent le décollage si le poids de l'appareil dépasse 220 tonnes. Les 230 places ont été réservées et on sait que le poids d'un passager suit une loi d'espérance 68kg et d'écart type 10kg.
On admet que le poids des bagages suit une loi d'espérance égale à 18kg et d'écart type 7kg et que ces variables sont indépendantes.

1) X est la variable aléatoire égale au poids de l'appareil lors du décollage, calculer $\mathbf{E}(X)$ et σ_X.
2) Déterminer un majorant de la probabilité que l'appareil n'ait pas l'autorisation de décoller.

Exercice 19 (**)
Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n.
Une urne U_2 contient des boules dont une proportion p de boules rouges.
On tire au hasard une boule dans U_1 et on note X la variable aléatoire égale au numéro tiré.
On tire ensuite, autant de boules dans l'urne U_2 (avec remise) que le numéro obtenu pour X. On note Y le nombre total de boules rouges obtenues.

1) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2) Déterminer la loi de Y sachant $[X = k]$.
3) Déterminer la loi du couple (X, Y).
4) Que vaut la covariance $\mathbf{Cov}\,(X, Y)$?

Exercice 20 (**)
On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1) Donner la loi conjointe du couple (X, Y).
2) Calculer $\mathbf{P}\,(X = Y)$.
3) Calculer l'espérance de Y.
4) Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

2 Exercices théoriques

Exercice 21 (*)
Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.

1) Donner l'espérance de leur somme.

2) Donner l'espérance de leur minimum.

Exercice 22 (*)
Soit X dont la loi est donnée par $\mathbf{P}(X=0)=1/6$, $\mathbf{P}(X=1)=\mathbf{P}(X=-1)=1/4$ et $\mathbf{P}(X=2)=P(X=-2)=\frac{1}{6}$.
On pose $Y=X^2$.

1) Donner la loi du couple (X, Y). En déduire la loi de Y.

2) Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 23 (**)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et X une variable aléatoire qui suite une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $Y=(X+1)^2$.
Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

Exercice 24 (**)
Soient X et Y deux variables aléatoires qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2.

1) Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $[X=1]$ et $[Y=1]$ sont indépendants.

2) En déduire que les variables sont indépendantes si, et seulement si elles sont décorrélées.

Exercice 25 (**) (classique)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
On considère une suite $(X_i)_{i \in [\![1, n]\!]}$ de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
On pose $X=\min\limits_{i \in [\![1, n]\!]}(X_i)$ et $Y=\max\limits_{i \in [\![1, n]\!]}(X_i)$ et

1) S'il existe $p \in]0,1[$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.
   (a) Déterminer les lois de X et de Y.
   (b) Donner les espérances $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.

2) S'il existe $N \geqslant 2$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, N]\!])$ (la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$),
   (a) Déterminer les lois de X et de Y.
   (b) Montrer que X et $N+1-Y$ suivent la même loi. En déduire l'espérance de $X+Y$.

Exercice 26 (**)
Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p et indépendantes.

1) Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $Y_n=X_n X_{n+1}$, déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.

2) Soit $(i, j) \in \mathbf{N}^2$, calculer $\mathbf{Cov}(Y_i, Y_j)$.

Exercice 27 (**)
Soient $0<p<1$ et $q=1-p$.
$(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_k=X_k+X_{k+1}$.

1) Calculer pour $k \in [\![1; n]\!]$, $\mathbf{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$

2) Montrer que $0<\mathbf{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) \leqslant \frac{1}{4}$

3) Calculer pour tout $1 \leqslant k<l \leqslant n$, $\mathbf{Cov}(Y_k, Y_l)$

4) (***) Soit $\varepsilon>0$ fixé, montrer que
$$\lim_{n \rightarrow+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k-2 p\right|>\varepsilon\right)=0.$$

Exercice 28 (**)
Soit X une variable aléatoire d'espérance m et de variance σ inconnues. On dispose d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$, mutuellement indépendantes et toutes de même loi que X.
Pour θ un paramètre lié à la loi X (par exemple son espérance ou sa variance), on dit qu'une variables aléatoire θ_n obtenue à partir de $X_1, X_2, \cdots X_n$ est un *estimateur sans biais* de θ si, $\mathbf{E}(\theta_n)=\mathbf{E}(\theta)$.

1) On pose $M_n=\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.
Montrer que M_n est un estimateur sans biais de l'espérance de X.

2) On pose $T_n=\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n(X_k-m)^2$.
Montrer que T_n est un estimateur sans biais de la variance $\mathbf{V}(X)$.

3) (***) On pose $\widetilde{T_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M_n)^2$.
Montrer que $\widetilde{T_n}$ est un estimateur de $\mathbf{V}(X)$ avec biais, et en déduire un estimateur sans biais simple de $\mathbf{V}(X)$ qui n'utilise pas la valeur de m.

Exercice 29 (***)

1) Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,+1\}$.
Montrer la propriété suivante : Pour tout triplet $(a,b,c) \in \{-1,+1\}^3$,
$\mathbf{P}_{[Y=b]}(X = a \cap Z = c) = \mathbf{P}_{[Y=b]}(X = a)\,\mathbf{P}_{[Y=b]}(Z = c)$

2) Comment construire un triplet (X,Y,Z) de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,+1\}$, *non indépendantes*, telle que la propriété soit satisfaite avec

$$\mathbf{P}(X = a \text{ et } Y = b \text{ et } Z = c) > 0$$

pour tout triplet $(a,b,c) \in \{-1,+1\}^3$?

Indication : On pourra par exemple choisir la même expression pour les lois conditionnelles de X sachant $Y = b$ et de Z sachant $Y = b$.

Exercice 30 (Marche aléatoire)
Une puce se déplace aléatoirement dans le plan suivant le protocole suivant :

- À l'instant 0, elle se trouve au point (0, 0).
- À chaque instant, elle effectue un déplacement de longueur 1 dans l'une des quatre directions suivante (choisie au hasard) : est, ouest, nord ou sud.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note X_n l'abscisse de la puce, Y_n son ordonnée et Z_n sa distance à l'origine.

1) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer l'espérance et la variance de X_n.

2) Déterminer de même, $\mathbf{E}(Y_n)$ et $\mathbf{V}(Y_n)$.

3) Calculer $\mathbf{E}\left(Z_n^2\right)$.

4) Montrer alors qur pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $|\mathbf{E}(Z_n)| \leqslant \sqrt{n}$.

3 CCINP

Exercice 31 (CCINP 95)
Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

2) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

   (a) Déterminer la loi de X.

   (b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 32 (CCINP 98)
Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1) Donner la loi de X. Justifier.

2) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(Y = k | X = i)$.

   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication :
   on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 33 (CCINP 99)

1) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $Y_n \in L^2$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   Prouver que :

$$\forall a \in]0, +\infty[\,,\ \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbf{E}(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(Y_1)}{na^2}.$$

3) **Application**: On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Exercice 34 (CCINP 104)
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1) Préciser les valeurs prises par X.

2) (a) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

3) (a) Calculer $\mathbf{E}(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{E}(X)$. Interpréter ce résultat.