STRUCTURES ALGÈBRIQUES

1 GROUPES ET SOUS-GROUPES

1.1 Facile

Exercice 1 (*)

Montrer que $\{p\sqrt{2} + q\sqrt{3}, (p, q) \in \mathbf{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$.

Exercice 2 (*)

Soit $(G, \star)$ un groupe et $a \in G$.

Montrer que $E = \{a \star g \star a^{-1}, g \in G\}$ est un sous-groupe de G .

Exercice 3 (*)

Soit X un ensemble non vide, et $x \in X$.

Montrer que $\text{Fix}(x) = \{\sigma \in S_X, \sigma(x) = x\}$ est un sous-groupe de S_X .

Exercice 4 (*)

Soient $(G_1, \star_1)$ et $(G_2, \star_2)$ deux groupes.

On pose $G = G_1 \times G_2$ et pour tout $(g_1, g'_1), (g_2, g'_2) \in G$, on note

$$(g_1, g_2) \star (g'_1, g'_2) = (g_1 \star_1 g'_1, g_2 \star_2 g'_2).$$

Montrer que $(G, \star)$ est un groupe.

1.2 Union-intersection

Exercice 5 (*)

Soit G un groupe. On considère (G_i) une famille de sous-groupes de G .

Montrer que $\bigcap_{i \in I} G_i$ est un sous-groupe de G .

Exercice 6 (**)

Soit G un groupe et G_1, G_2 deux sous-groupes de G .

Montrer que $G_1 \cup G_2$ est un groupe si, et seulement si $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$.

Exercice 7 (**)

Montrer que $\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \mathbf{U}_n, \times\right)$ est un groupe.

1.3 Arithmétique

Exercice 8 (**) (Incontournable)

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n\mathbf{Z} = \{nk, k \in \mathbf{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$.
- 2) Montrer que tout sous-groupe de $\mathbf{Z}$ est de la forme $n\mathbf{Z}$ pour un certain $n \in \mathbf{N}$.
- 3) Montrer que pour $(d, d') \in \mathbf{N}^2$, $d|d' \iff d'\mathbf{Z} \subset d\mathbf{Z}$.
- 4) (a) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$, $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = \{ak + bk', (k, k') \in \mathbf{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$.
(b) En déduire qu'il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = d\mathbf{Z}$.
(c) Montrer que si $(a, b) \neq (0, 0)$, $d = a \wedge b$.
- 5) Montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbf{Z}^*)^2$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $m\mathbf{Z} = a\mathbf{Z} \cap b\mathbf{Z}$.
Montrer que $m = a \vee b$.

2 ANNEAUX-CORPS

Exercice 9 (*)

- 1) Montrer que tout sous-anneau de $(\mathbf{R}, +, \times)$ contient $\mathbf{Z}$.
- 2) Montrer que tout sous-corps de $(\mathbf{R}, +, \times)$ contient $\mathbf{Q}$.
- 3) Déterminer les sous-corps de $(\mathbf{Q}, +, \times)$.

Exercice 10 (**)

On note $\mathbf{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbf{Z}^2\}$ l'ensemble des *entiers de Gauss*.

- 1) Montrer que $\mathbf{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbf{C}$.
- 2) Déterminer les inversibles de $\mathbf{Z}[i]$.
On pourra s'aider du module.
- 3) Un entier de Gauss a est irréductible si pour tout $(b, c) \in (\mathbf{Z}[i])^2$,

$$a = bc \implies b \text{ ou } c \text{ inversible.}$$

2 est-il irréductible ?

Exercice 11 (**)

Déterminer tous les endomorphismes d'anneau de $\mathbf{Q}$.

Exercice 12 ()**

On note $\mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbf{Q}^2\}$.

- 1) Montrer que $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ est un corps.
- 2) Déterminer tous les endomorphismes d'anneau de $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$.

Exercice 13 (Suite du précédent)

- 1) Soit $x \notin \{u^2, u \in \mathbf{Q}\}$.
Montrer que $K = \{a + b\sqrt{x}, (a, b) \in \mathbf{Q}^2\}$ est un corps.
- 2) Déterminer les morphismes d'anneaux de K dans lui-même.
- 3) *En déduire* que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $k = (3 + \sqrt{7})^n + (3 - \sqrt{7})^n \in \mathbf{Q}$.
- 4) Adapter la preuve pour montrer que $k \in \mathbf{Z}$.
- 5) Proposer aussi une autre preuve de ce résultat.

Exercice 14 (*)**

Soit A un anneau.

$x \in A$ est dit nilpotent, s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $x^n = 0$.

- 1) Déterminer les éléments nilpotents d'un anneau intègre.
- 2) Montrer que si $x \in A$ est nilpotent, alors $-x$ aussi.
- 3) Pour $(x, y) \in A^2$, montrer que si xy est nilpotent alors yx l'est aussi.
- 4) Pour $(x, y) \in A^2$ deux éléments nilpotents qui commutent.
Montrer que $(x + y)$ est aussi nilpotent.
- 5) Soit $x \in A$ nilpotent. Montrer que $1 - x$ est inversible, et calculer son inverse.

Exercice 15 (*) (Froebenius)**

Soit A un anneau commutatif.

- 1) Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $\phi : \mathbf{Z} \rightarrow A$.
- 2) Montrer que $\ker(\phi)$ est de la forme $n\mathbf{Z}$ avec $n \in \mathbf{N}$.
On appelle n la caractéristique de l'anneau A .
- 3) Soit A de caractéristique p avec p un nombre premier.
Montrer que $a \mapsto a^p$ définit un endomorphisme d'anneaux.

3 APPROFONDISSEMENT

Exercice 16 (Anciennement CCINP 66)

On note p un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère dans $\mathbf{Z}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par :

$$x \mathcal{R} y \stackrel{\text{déf.}}{\iff} \exists k \in \mathbf{Z} \text{ tel que } x - y = kp.$$

On note $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation $\mathcal{R}$.

- 1) Quelle est la classe d'équivalence de 0 ? Quelle est celle de p ?
- 2) Donner soigneusement la définition de l'addition usuelle et de la multiplication usuelle dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
On justifiera que ces définitions sont cohérentes.
- 3) On admet que, muni de ces opérations, $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un anneau.
Démontrer que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier.

Exercice 17 ()**

Soit G un groupe multiplicatif de cardinal pair et d'élément neutre e .

- 1) Montrer que la relation définie par

$$\forall (x, y) \in G^2, x \mathcal{R} y \iff (x = y \text{ ou } x = y^{-1})$$

définit une relation d'équivalence sur G .

- 2) Montrer qu'il existe au moins un élément $x \in G$ et différent de l'élément neutre tel que $x^2 = e$. *On dit que x est d'ordre 2.*

Exercice 18 (*)**

Soit G un ensemble fini non vide muni d'une loi $\star$ interne et associative.

On suppose que tous les éléments de G sont réguliers.

Montrer que G est un groupe.

Exercice 19 ()**

Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on pose

$$x \star y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}.$$

- 1) Montrer que $\sqrt{1+(x \star y)^2} = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy$.
- 2) Montrer que $(\mathbf{R}, \star)$ est un groupe.
- 3) Montrer que sh réalise un isomorphisme de $(\mathbf{R}, +)$ sur $(\mathbf{R}, \star)$.

Exercice 20 (*)**

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi $\star$ interne, associative et possédant un élément neutre e .

Soit $a \in E$ et $f : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x & \mapsto a \star x. \end{cases}$

Montrer que a admet un symétrique dans E si, et seulement si f est bijective.

Exercice 21 ()**

Soit φ un morphisme d'un groupe fini $(G, \star)$ vers $(\mathbf{C}^*, \times)$.

On suppose que φ n'est pas une application constante. Calculer

$$u = \sum_{x \in G} \varphi(x).$$

Exercice 22 (*) (*) (Théorème du rang)**

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes, avec G groupe fini. Montrer que

$$|\ker f| |\operatorname{Im} f| = |G|.$$

$|F|$ désigne le cardinal de l'ensemble F , c'est-à-dire son nombre d'éléments. On rappelle (?) que deux ensembles finis en bijection ont le même nombre d'éléments.