Applications linéaires

1 Applications

Exercice 1 (Vrai-Faux)
Les applications suivantes sont-elles linéaires ?
Si elle le sont : établir si elles sont injectives, surjectives et déterminer leur noyau et leur image.

1. $\begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (5x+2y, x-y) \end{cases}$.
2. $\begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, y) \end{cases}$.
3. $\begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+1, y, x+y) \end{cases}$.
4. $\begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, z) \end{cases}$.
5. $\begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,x,x,x) \end{cases}$.

Exercice 2 (*)
Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-y)$.
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbf{R}^2$ et donner sa réciproque.

Exercice 3
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1. Montrer que la donnée $\begin{cases} \varphi(e_1) & = e_1 + e_2 \\ \varphi(e_2) & = e_1 - e_2 \\ \varphi(e_3) & = e_1 + \lambda e_3 \end{cases}$ définit un unique endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$.
2. Soit $x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. Calculer $\varphi(x)$.
3. Quelle valeur donner à λ pour que φ soit injective ? soit surjective ?

2 Écriture matricielle

Exercice 4 (*)
Soit $M = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.
On note u_M l'application linéaire canoniquement associée à M *(dans les bases canoniques de* $\mathbf{R}^4$ *et* $\mathbf{R}^3$*)*.
Déterminer des bases de $\ker u_M$ et $\operatorname{Im} u_M$.

Exercice 5 (**)
Soit E un espace vectoriel de dimension n, et f un automorphisme de E. Montrer qu'il existe deux base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ telles que la matrice de f entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ soit la matrice identité de taille n.

Exercice 6 (**)
Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{R}^4$
Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbf{R}^4$ tel que

- $f(e_1) = e1 - e_2 + e_3$,
- $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$,
- $\ker f = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4,\ \text{tels que } x+2y+z=0 \text{ et } x+3y-t=0\}$.

Indication : on pourra chercher une base de $\ker f$.

Exercice 7 (**)
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $\phi : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{pmatrix}$.
Montrer que ϕ est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique (ordonnée par l'ordre lexicographique).
Préciser $\ker \phi$ et $\operatorname{Im} \phi$.

3 Images et noyaux

Exercice 8 (*)
Donner l'image et le noyau de

1. $(x,y) \mapsto (x+3y, x-3y)$.
2. $(x,y) \mapsto (x, y, x+y)$.
3. $(x,y,z) \mapsto (x+y+2z, 2x-3y+z)$.
4. $(x,y,z) \mapsto (x-y+z, x+5y-z, 2x+2y+3z)$.
5. $(x,y,z) \mapsto (x-y-z+t, x+2y+z-t, 3x-z+t, 2x-y+t)$.

Exercice 9 (**)
Soient E, F, G trois espaces vectoriels,
$f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Interpréter la proposition « $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$ » avec $\operatorname{Im} f$ et $\ker g$.
2. Montrer que $f(\ker(g \circ f)) = \ker g \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 10 (***)
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$, montrer que si f et g commutent, alors $\ker g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f.
Rappel de vocabulaire :
Un sous espace vectoriel F de E est dit stable par f, si $f(F) \subset F$.

Exercice 11 (***)
Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
On considère $\mathcal{E} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs de E, et on note $\mathcal{F} = (f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n))$.

- Montrer que si f est injective et $\mathcal{E}$ libre, alors $\mathcal{F}$ est libre.
- Montrer que si f est surjective et $\mathcal{E}$ est génératrice de E, alors $\mathcal{F}$ est génératrice de F.

4 Espaces de polynômes

Exercice 12 (*)
Donner une famille génératrice de

$$\{P \in \mathbf{R}_3[X] \text{ tel que } P(0) = P'(0) = 0\}.$$

Exercice 13 (*)
E est l'espace vectoriel des fonction polynomiales réelles de degré au plus 2.
(e_1, e_2, e_3) est la base canonique de E.
φ est l'application de E dans $\mathbf{R}^3$ définie par

$$\varphi(P) = (P(0), P'(1), P''(2)).$$

1. Démontrer que φ est linéaire, qu'elle est injective, puis que c'est un isomorphisme.
2. Donner la matrice A de φ dans les bases canoniques de E et de $\mathbf{R}^3$.
3. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose $H_i = \varphi^{-1}(e_i)$. Montrer que (H_1, H_2, H_3) est une base de E.
4. À l'aide de la matrice A^{-1}, exprimer H_1, H_2, H_3 en fonction de e_1, e_2, e_3.

Exercice 14 (**) (base)
Soit F défini par :

$$F = \left\{P \in \mathbf{R}_3[X], \int_0^1 P = 0\right\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Donner une base de F.
3. Écrire F comme noyau d'une application linéaire de $\mathbf{R}_3[X]$ dans $\mathbf{R}$.
   Retrouver ainsi la dimension de F en utilisant le théorème du rang.

Exercice 15 (**) (à savoir refaire)
Soit $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ une famille de $\mathbf{R}_n[X]$ telle que

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ \deg P_i = i.$$

Montrer que cette famille est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 16 (**)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $P \in \mathbf{R}_n[X]$ de degré exactement égal à n.
Montrer que $(P, P', P'', P^{(3)}, \ldots, P^{(n)})$ forme une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 17 (**)
Soient $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ trois réels distincts deux à deux.
Soit f l'application définie par

$$\begin{cases} \mathbf{R}_2[X] & \to \mathbf{R}^3 \\ P & \mapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{cases}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. f est-elle injective, surjective, bijective ?
3. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
   Déterminer $\left(f^{-1}(e_1), f^{-1}(e_2), f^{-1}(e_3)\right)$.
   Est-ce une base de $\mathbf{R}_2[X]$?

Exercice 18 (***) (classique)
Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels distincts.

1. Montrer que $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\exists! P_i \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que P_i unitaire, $\deg P_i = n$ et P_i s'annule en $(a_k)_{k \neq i}$.
2. Montrer que $(P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n)$ forment une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 19 (***)

1. Montrer que si F est un espace de dimension n et G de dimension p, alors $F \times G$ est un espace de dimension $n + p$.
   On pourra construire une base adaptée.
   Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R} \times \mathbf{R}[X] \\ P & \mapsto & (P(0), P') \end{array} \right.$
2. Montrer que f est linéaire,
3. En déduire que $\mathbf{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.

5 Exercices théoriques

Exercice 20 (*)
Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, \mathbf{R})$.
Montrer que si $f \neq 0$, alors f est surjective.

Exercice 21 (**)
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}$.
Montrer qu'il existe un endomorphisme f tel que $\mathrm{Im}\,(f) = \ker(f)$ si, et seulement si, n est pair.

Exercice 22 (**)
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.
Montrer l'équivalence

$$\ker(f) = \mathrm{Im}\,(f) \iff f^2 = 0 \text{ et } n = 2\mathrm{rg}\,(f).$$

Exercice 23 (**)
Soit E un espace vectoriel et f, g, deux applications linéaires de $\mathcal{L}(E, \mathbf{R})$.
Montrer que si, $\forall x \in E$, $f(x)g(x) = 0$,
alors $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 24 (**)
Soient f et g deux applications linéaires de E. Montrer que f et g sont inversibles si et seulement si $f \circ g$ et $g \circ f$ le sont.

Exercice 25 (**)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(f^2) \leqslant \dim E$.

Exercice 26 (***)
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$.
Montrer qu'il existe $a \in \mathbf{R}^3$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^3,\ f(x) = \varphi(x) \cdot a.$$

Exercice 27 (***)
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que

$$\forall x \in E,\ \exists \lambda \in \mathbf{R},\ f(x) = \lambda x.$$

Montrer que $\exists \lambda \in \mathbf{R}$, $\forall x \in E$, $f(x) = \lambda x$.

Exercice 28 (***)
Soit E de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}\, f = 1$.
Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

Exercice 29 (***)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Montrer que $\left(\mathrm{Id}, f, f^2, ..., f^{n^2}\right)$ est liée et en déduire qu'il existe un polynôme non identiquement nul qui annule f.