Logique et raisonnement

1 Pour commencer...

Exercice 1 (*)
Soit f une application définie sur $\mathbf{R}$.
Dire pour chaque situation si les deux assertions ont la même signification ou non. Expliquer.

1) « $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x)=0$ » et « $\forall z \in \mathbf{R},\ f(z)=0$ ».
2) « $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x)=0$ » et « $\exists x \in \mathbf{R},\ f(x)=0$ ».
3) « Les éléments sont non tous nuls » et « les éléments sont tous non nuls ».

Exercice 2 (*)
Donner la valeur de vérité des assertions

1) « $\frac{1}{x} \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 0$ ».
2) « $x \geqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \geqslant 0$ ».
3) « $x \mapsto \cos x$ est croissante sur $\mathbf{R} \iff \mathbf{Z}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{N}$ ».
4) « (u_n) n'est pas croissante $\Rightarrow (u_n)$ est décroissante ».
5) « $\big(\forall x \in \mathbf{R}, \exists \lambda \in \mathbf{R},$ tel que $f(x)=\lambda x\big) \iff f$ est une fonction linéaire ».

Exercice 3 (*)
Compléter avec $\Rightarrow$, $\iff$ ou $\Leftarrow$.

$ABCD$ est un carré	$ABCD$ est un parallélogramme
a>1	$\frac{1}{a} < 1$
$AB = AC$	ABC est isocèle
$\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, y < x$	$\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, y < x$
$\ln a = b$	$a = \mathrm{e}^b$
$x > 2$	$x^2 > 4$
A, B alignés et B, C alignés	A, B, C alignés.
$x > 0$	$-x \leqslant 0$
f est continue	f est dérivable.

Exercice 4 (*)

1) Quelle est la contraposée de :
« si un nombre est divisible par 6, alors il est pair » ?
2) Quelle est la réciproque du théorème :
« Si un nombre entier est multiple de 10 alors son chiffre des unités est 0 ».
3) Quelle est la contraposée du théorème :
« Si un nombre entier est multiple de 10 alors son chiffre des unités est 0 ».

2 Lecture des quantificateurs

Exercice 5 (**)
Ces propositions sont-elles vraies ?

1) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbf{R}_+^*,\ a < \varepsilon$.
2) $\forall a \in \mathbf{R},\ \mathrm{e}^a > 0 \Rightarrow a > 0$.
3) $\forall a \in \mathbf{R},\ a > 0 \Rightarrow \mathrm{e}^a > 0$.
4) $\forall a \in \mathbf{R},\ \mathrm{e}^a < 0 \Rightarrow a < 0$.
5) Si f est une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, alors $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R},\ f(x) = y$.
6) Si f est une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, alors $\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = y$.
7) Si f est une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, alors $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R},\ f(x) = y$.
8) Si f est une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, alors $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ f(x) = y$.

Exercice 6 (**)
Existe-t-il une fonction f sur $\mathbf{R}$, vérifiant

$$\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ f(y) > f(x).$$

Exercice 7 (**)
Donner la signification des propositions :

1) $\forall x \in \mathbf{R}, \exists M \in \mathbf{R}, f(x) \leqslant M$.
2) $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$.
3) $\forall A \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}, u_n > A$.
4) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_\varepsilon, |u_n| \leqslant \varepsilon$.

3 Écriture avec les quantificateurs

Exercice 8 (*)
Écrire les propositions suivantes avec des quantificateurs :

1) La fonction f est majorée sur $\mathbf{R}$.
2) La fonction f n'est pas majorée sur $\mathbf{R}$.
3) La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$.
4) La fonction f s'annule sur $\mathbf{R}$.
5) La fonction f est nulle sur $\mathbf{R}$.
6) La fonction f s'annule une unique fois sur $\mathbf{R}$.

Exercice 9 (*)
Écrire les propositions suivantes avec des quantificateurs :

1) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres,
2) Entre deux nombres rationnels distincts, il existe toujours un nombre irrationnel.
3) Étant donnés trois réels, il en existe au moins deux de même signe.
4) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
5) La fonction f est supérieure ou égale à la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}$.

4 Négation

Exercice 10 (**)
Donner la négation (avec les quantificateurs) des propositions de l'exercice 7.

Exercice 11 (**)
Donner la négation des assertions :

1) $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ f(x) > y$.
2) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ x > y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
3) $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ x > y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
4) $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R},\ x > y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.

5 Construire un raisonnement

Exercice 12 (**)
Montrer que

1) Pour $n \in \mathbf{N}$, si n^2 est impair, alors n est impair.
2) Pour $a \in \mathbf{R}$, si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $\frac{a}{2}$ n'est pas un entier pair.
3) Pour $a \in \mathbf{R}$, si $\forall \varepsilon > 0,\ a \leqslant \varepsilon$ alors $a \leqslant 0$.

Exercice 13 (*)
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 14 (**)
a et b désignent deux nombres réels.

1) Montrer que si $a + b > 1$, alors $a > \frac{1}{2}$ ou $b > \frac{1}{2}$.
2) Est-il vrai que si $ab > 1$, alors $a > 1$ ou $b > 1$?

Exercice 15 (**)
Trouver toutes les fonctions f qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \exists \lambda \in \mathbf{R},\ \text{ tel que } f(x) = \lambda x.$$

Exercice 16 (**)
Soit $n \in \mathbf{N}$, démontrer que $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11.

Exercice 17 (**)
Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f\left(y - f(x)\right) = 2 - x - y.$$

Donner son expression.

6 Pour s'entraîner

Exercice 18 (*)
Montrer que :
$$\forall x \in \mathbf{R},\ |x-2| < x^2 - 2x + 3.$$

Exercice 19 (**)
Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $(a_1, \cdots, a_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$ et $M \in \mathbf{R}$.
Montrer que
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n > M \quad \Rightarrow \quad \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} > \frac{M}{n}.$$
Soigner la rédaction.

Exercice 20 (**)
Trouver toutes les fonctions $f\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que
$$\forall (x,\, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Exercice 21 (**)
Trouver l'ensemble des fonctions $f\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $\forall (x,\, y,\, z) \in \mathbf{R}^3$, on ait
$$\left(f(x) - f(y)\right)(x - z) = \left(f(x) - f(z)\right)(x - y).$$

Exercice 22 (**)
Au jeu des allumettes, deux joueurs disposent en commun de 100 allumettes.
Chacun à son tour enlève au choix de 1 à 7 allumettes.
Le joueur qui retire la dernière allumette gagne.

1) Montrer que le premier joueur peut être certain de gagner avec la bonne stratégie.
2) Généraliser ce résultat à un nombre n quelconque d'allumettes avec la possibilité de retirer k allumettes.

Exercice 23 (**)
On définit le logarithme décimal de x : $\log(x)$ comme l'unique y tel que $10^y = x$. Montrer que $\log 2 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Exercice 24 (***)
Existe-t-il une fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que
$$\forall (x, y) \in \mathbf{N}^2,\ \left(f(x)^{f(y)}\right) = y^x.$$

Exercice 25 (***)
Déterminer l'ensemble des fonctions $f\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que
$$\forall (x,\, y) \in \mathbf{R}^2,\ |f(x) - f(y)| = |x - y|\,.$$
Indication : on pourra poser $g = f - f(0)$.

Exercice 26 (**)

1) Démontrer que si on range $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.
2) On considère 3 nombres pris dans l'intervalle $]0,\, 1]$. Montrer qu'il en existe au moins 2 notés a, b tels que $|b - a| < \frac{1}{2}$.
3) On considère un carré de côté 1 contenant 51 points.
Montrer qu'il existe au moins 3 points situés à une distance inférieure à $\frac{2}{7}$.

Exercice 27 (* *)**
On considère une suite (u_n) sous-additive, c'est-à-dire telle que
$$\forall (i, j) \in (\mathbf{N}^*)^2\,, \quad u_{i+j} \leqslant u_i + u_j.$$

1) Montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}.$$
2) Trouver une suite sous-additive qui vérifie le cas d'égalité :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}.$$
3) En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}^*$,
$$\sqrt{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 28 (* *)**
Montrer qu'il existe une unique application $f\ :\ \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad f(n+1) > f\left(f(n)\right).$$
Indication en note de bas de page [1]

[1] Pour une fonction f solution, on pourra commencer par chercher l'ensemble des k tels que $f(k) = \min\{f(n),\ n \in \mathbf{N}\}$. Ce n'est que la première étape du raisonnement.