

# LOGIQUE ET RAISONNEMENT

## 1 POUR COMMENCER...

### Exercice 1 (\*)

Soit  $f$  une application définie sur  $\mathbf{R}$ .

Dire pour chaque situation si les deux assertions ont la même signification ou non. Expliquer.

- 1) «  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$  » et «  $\forall z \in \mathbf{R}, f(z) = 0$  ».
- 2) «  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$  » et «  $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$  ».
- 3) « Les éléments sont non tous nuls » et « les éléments sont tous non nuls ».

### Exercice 2 (\*)

Donner la valeur de vérité des assertions

- 1) «  $\frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$  ».
- 2) «  $x \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq 0$  ».
- 3) «  $x \mapsto \cos x$  est croissante sur  $\mathbf{R} \iff \mathbf{Z}$  est un sous-ensemble de  $\mathbf{N}$  ».
- 4) «  $(u_n)$  n'est pas croissante  $\Rightarrow (u_n)$  est décroissante ».
- 5) «  $(\forall x \in \mathbf{R}, \exists \lambda \in \mathbf{R}, \text{ tel que } f(x) = \lambda x) \iff f$  est une fonction linéaire ».

### Exercice 3 (\*)

Compléter avec  $\Rightarrow$ ,  $\iff$  ou  $\Leftarrow$ .

$ABCD$  est un carré

$a > 1$

$AB = AC$

$\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, y < x$

$\ln a = b$

$x > 2$

$A, B$  alignés et  $B, C$  alignés

$x > 0$

$f$  est continue

$ABCD$  est un parallélogramme

$\frac{1}{a} < 1$

$ABC$  est isocèle

$\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, y < x$

$a = e^b$

$x^2 > 4$

$A, B, C$  alignés.

$-x \leq 0$

$f$  est dérivable.

### Exercice 4 (\*)

- 1) Quelle est la contraposée de :  
« si un nombre est divisible par 6, alors il est pair » ?
- 2) Quelle est la réciproque du théorème :  
« Si un nombre entier est multiple de 10 alors son chiffre des unités est 0 ».
- 3) Quelle est la contraposée du théorème :  
« Si un nombre entier est multiple de 10 alors son chiffre des unités est 0 ».

## 2 LECTURE DES QUANTIFICATEURS

### Exercice 5 (\*\*)

Ces propositions sont-elles vraies ?

- 1)  $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbf{R}_+, a < \varepsilon$ .
- 2)  $\forall a \in \mathbf{R}, e^a > 0 \Rightarrow a > 0$ .
- 3)  $\forall a \in \mathbf{R}, a > 0 \Rightarrow e^a > 0$ .
- 4)  $\forall a \in \mathbf{R}, e^a < 0 \Rightarrow a < 0$ .
- 5)  $\forall f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, f(x) = y$ .
- 6)  $\forall f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = y$ .
- 7)  $\forall f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, f(x) = y$ .
- 8)  $\forall f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(x) = y$

### Exercice 6 (\*\*)

Existe-t-il une fonction  $f$  sur  $\mathbf{R}$ , vérifiant

$$\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(y) > f(x).$$

### Exercice 7 (\*\*)

Donner la signification des propositions :

- 1)  $\forall x \in \mathbf{R}, \exists M \in \mathbf{R}, f(x) \leq M$ .
- 2)  $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \geq u_n$ .
- 3)  $\forall A \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}, u_n > A$ .
- 4)  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, |u_n| \leq \varepsilon$ .

### 3 ÉCRITURE AVEC LES QUANTIFICATEURS

#### Exercice 8 (\*)

Écrire les propositions suivantes avec des quantificateurs :

- 1) La fonction  $f$  est majorée sur  $\mathbf{R}$ .
- 2) La fonction  $f$  n'est pas majorée sur  $\mathbf{R}$ .
- 3) La fonction  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbf{R}$ .
- 4) La fonction  $f$  s'annule sur  $\mathbf{R}$ .
- 5) La fonction  $f$  est nulle sur  $\mathbf{R}$ .
- 6) La fonction  $f$  s'annule une unique fois sur  $\mathbf{R}$ .

#### Exercice 9 (\*)

Écrire les propositions suivantes avec des quantificateurs :

- 1) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres,
- 2) Entre deux nombres rationnels distincts, il existe toujours un nombre irrationnel.
- 3) Étant donnés trois réels, il en existe au moins deux de même signe.
- 4) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
- 5) La fonction  $f$  est supérieure ou égale à la fonction  $x \mapsto x^2$  sur  $\mathbf{R}$ .

### 4 NÉGATION

#### Exercice 10 (\*\*)

Donner la négation (avec les quantificateurs) des propositions de l'exercice 7.

#### Exercice 11 (\*\*)

Donner la négation des assertions :

- 1)  $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(x) > y$ .
- 2)  $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ .
- 3)  $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ .
- 4)  $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ .

### 5 CONSTRUIRE UN RAISONNEMENT

#### Exercice 12 (\*\*)

Montrer que

- 1) Pour  $n \in \mathbf{N}$ , si  $n^2$  est impair, alors  $n$  est impair.
- 2) Pour  $a \in \mathbf{R}$ , si  $a^2$  n'est pas un multiple entier de 16, alors  $\frac{a}{2}$  n'est pas un entier pair.
- 3) Pour  $a \in \mathbf{R}$ , si  $\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon$  alors  $a \leq 0$ .

#### Exercice 13 (\*)

Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

#### Exercice 14 (\*\*)

$a$  et  $b$  désignent deux nombres réels.

- 1) Montrer que si  $a + b > 1$ , alors  $a > \frac{1}{2}$  ou  $b > \frac{1}{2}$ .
- 2) Est-il vrai que si  $ab > 1$ , alors  $a > 1$  ou  $b > 1$  ?

#### Exercice 15 (\*\*)

Trouver toutes les fonctions  $f$  qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \exists \lambda \in \mathbf{R}, \text{ tel que } f(x) = \lambda x.$$

#### Exercice 16 (\*\*)

Soit  $n \in \mathbf{N}$ , démontrer que  $10^n - (-1)^n$  est divisible par 11.

#### Exercice 17 (\*\*)

Montrer qu'il existe une unique fonction  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Donner son expression.

## 6 POUR S'ENTRAÎNER

**Exercice 18 (\*)**

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, |x - 2| < x^2 - 2x + 3.$$

**Exercice 19 (\*\*)**

Soient  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$  et  $M \in \mathbf{R}$ .

Montrer que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > M \quad \Rightarrow \quad \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} > \frac{M}{n}.$$

Soigner la rédaction.

**Exercice 20 (\*\*)**

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

**Exercice 21 (\*\*)**

Trouver l'ensemble des fonctions  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  telles que  $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ , on ait

$$(f(x) - f(y))(x - z) = (f(x) - f(z))(x - y).$$

**Exercice 22 (\*\*)**

Au jeu des allumettes, deux joueurs disposent en commun de 100 allumettes.

Chacun à son tour enlève au choix de 1 à 7 allumettes.

Le joueur qui retire la dernière allumette gagne.

- 1) Montrer que le premier joueur peut être certain de gagner avec la bonne stratégie.
- 2) Généraliser ce résultat à un nombre  $n$  quelconque d'allumettes avec la possibilité de retirer  $k$  allumettes.

**Exercice 23 (\*\*)**

On définit le logarithme décimal de  $x$  :  $\log(x)$  comme l'unique  $y$  tel que  $10^y = x$ .

Montrer que  $\log 2 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ .

**Exercice 24 (\*\*\*)**

Existe-t-il une fonction  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{N}^2, (f(x))^{f(y)} = y^x.$$

**Exercice 25 (\*\*\*)**

Déterminer l'ensemble des fonctions  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

*Indication* : on pourra poser  $g = f - f(0)$ .

**Exercice 26 (\*\*)**

- 1) Démontrer que si on range  $(n + 1)$  paires de chaussettes dans  $n$  tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.
- 2) On considère 3 nombres pris dans l'intervalle  $]0, 1[$ . Montrer qu'il en existe au moins 2 notés  $a, b$  tels que  $|b - a| < \frac{1}{2}$ .
- 3) On considère un carré de côté 1 contenant 51 points. Montrer qu'il existe au moins 3 points situés à une distance inférieure à  $\frac{2}{7}$ .

**Exercice 27 (\*\*\*)**

On considère une suite  $(u_n)$  sous-additive, c'est-à-dire telle que

$$\forall (i, j) \in (\mathbf{N}^*)^2, u_{i+j} \leq u_i + u_j.$$

- 1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}.$$

- 2) Trouver une suite sous-additive qui vérifie le cas d'égalité :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}.$$

- 3) En déduire que  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,

$$\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

**Exercice 28 (\*\*\*)**

Montrer qu'il existe une unique application  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, f(n+1) > f(f(n)).$$

*Indication en note de bas de page* <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Pour une fonction  $f$  solution, on pourra commencer par chercher l'ensemble des  $k$  tels que  $f(k) = \min\{f(n), n \in \mathbf{N}\}$ . Ce n'est que la première étape du raisonnement.