# Dérivabilité

## 1 Calcul

**Exercice 1 (*)**
Sur quelle(s) partie(s) de $\mathbf{R}$, les applications suivantes sont-elles continues ? dérivables ? Calculer leur dérivée.
Dans le cas d'un prolongement possible par continuité, étudier la dérivabilité de la fonction prolongée, éventuellement son caractère $\mathscr{C}^1$.

1) $f\ :\ x \mapsto 2^{x^2+1}$.
2) $f\ :\ x \mapsto x|x|$.
3) $f\ :\ x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$.
4) $f\ :\ x \mapsto \sqrt{x^2-x^3}$.
5) $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
6) $f\ :\ x \mapsto \ln(\sqrt{x-1}+1)$.
7) $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}} \sin \frac{1}{x}$.
8) $f\ :\ x \mapsto (x+1)^{\cos x}$.
9) $f\ :\ x \mapsto (\sqrt{x}+1)^{\ln x}$.
10) (***) $f\ :\ x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^{-x}$.

**Exercice 2 (*)**
Déterminer les extrémums locaux de $f\ : x \mapsto x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbf{R}$.

**Exercice 3 (*)**
À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ \frac{x}{1+x^2} \leqslant \operatorname{Arctan} x \leqslant x.$$

**Exercice 4 (**)**
À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \left((x+1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right).$$

**Exercice 5 (**)**
Soit $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

1) Montrer que $f$ peut être prolongeable en une application continue sur $\mathbf{R}$.
On travaillera désormais avec l'application prolongée.
2) Faire l'étude des branches infinies de $f$.
3) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, \exists P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$

4) En déduire que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

**Exercice 6 (**) (Règle de l'Hospital)**
Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ et telles que $g'$ ne s'annule pas sur $]a,b[$.

1) Montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2) En déduire que :

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell.$$

3) Application : calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^x}{(x+1)\,\mathrm{e}^x - 1}.$$

## 2 Fonctions lipschitziennes

**Exercice 7 (*)**
Soient $K_1 \leqslant K_2$ deux réels positifs.
Comparer les ensembles : $\{f\ : I \to \mathbf{R},\ f \text{ est } K_1 - \text{lipschitzienne sur } I\}$ et $\{f\ : I \to \mathbf{R},\ f \text{ est } K_2 - \text{lipschitzienne sur } I\}$.

**Exercice 8 (**)**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\alpha > 1$. Déterminer toutes les applications vérifiant

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|^\alpha.$$

## 3 Raisonnements théoriques simples

**Exercice 9 (*)**
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable, telle que $f'$ ne s'annule pas. Montrer que $f$ ne peut pas être périodique.

**Exercice 10 (*)**
Soit $f$ une fonction dérivable sur $I$.

1) Montrer que si $f$ est paire, alors $f'$ est impaire.
Montrer que si $f$ est impaire, alors $f'$ est paire.
2) A-t-on les réciproques ?

**Exercice 11 (*)**
Soit $f$ dérivable en $a$. Montrer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Réciproquement, si la limite précédente existe, $f$ est-elle nécessairement dérivable en $a$ ?

**Exercice 12 (**) (à connaître)**
Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 scindé à racines simples[1].
Montrer que $P'$ est aussi scindé à racines simples.

**Exercice 13 (**)**
Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable, et

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(2x) & \text{si } x \in [0;\frac{1}{2}] \\ f(2x-1) & \text{sinon.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

À quelle(s) condition(s) $g$ est-elle dérivable ?

**Exercice 14 (**)**
Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ telle que $f'(0) = 0$.
Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$f(x) = g\left(x^2\right).$$

**Exercice 15 (**) (méthode)**
Soit $f$ dérivable sur $]0, 1[$ et admettant une limite finie commune en 0 et en 1.

1) Montrer qu'il existe $c \in ]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

2) Est-ce encore vrai si la limite n'est pas supposée finie ?

3) Soit $f$ dérivable sur $\mathbf{R}$ et admettant la même limite finie en $\pm\infty$.
Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

## 4 Convexité

**Exercice 16 (*)**
Montrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x) \leqslant x.$$

[1] Qui a autant de racines que son degré.

**Exercice 17 (*)**
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexe.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f$ soit bornée.

**Exercice 18 (*)**
Soient $f$ et $g$ deux fonctions convexes $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $g$ est croissante.
Montrer que $g \circ f$ est convexe.
Donner un contre-exemple si $g$ n'est pas croissante.

**Exercice 19 (*)**
Soit $f$ convexe de $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, montrer que $f$ est continue.

**Exercice 20 (*)**
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe.

1) On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Montrer que $f$ est positive.

2) On suppose que le graphe de $f$ possède la droite $y = ax + b$ comme asymptote oblique en $+\infty$.
Donner la position de $f$ par rapport à son asymptote.

**Exercice 21 (*)**
Soit $f$ convexe sur $\mathbf{R}$ qui admet un minimum local en $a$.
Montrer que ce minimum est global.

**Exercice 22 (***)**
Soient $(x_1, \cdots, x_n, y_1, ..y_n)$ des réels positifs. Montrer que

$$(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} + (y_1 \cdots y_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant ((x_1+y_1) \times \cdots (x_n+y_n))^{\frac{1}{n}}.$$

*Indication :* on pourra s'intéresser à la fonction $x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$.

## 5 Approfondissement

**Exercice 23 (***)**
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on considère le polynôme

$$P = \left(X^2 - 1\right)^n.$$

1) Montrer que pour tout $k \in [\![0,\, n-1]\!]$

$$P^{(k)}(-1) = P^{(k)}(1) = 0.$$

2) Montrer que $P^{(n)}$ est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$ et que toutes ses racines sont dans $]-1,\, 1[$ :

$$\mathrm{Rac}(P^{(n)}) \subset ]-1,\, 1[.$$

3) Calculer $P^{(n)}(1)$.

**Exercice 24 (***) (Théorème de Darboux)**
Soit $I$ un intervalle ouvert, $f \in \mathscr{D}^1(I, \mathbf{R})$. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.

**Exercice 25 (***)**
Soit $a > 0$ et $f$ une fonction réelle continue sur $[0, a]$ et dérivable sur $]0, a]$.
On suppose que $f(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in ]0, a[$ tel que $f'(c) = 0$.

**Exercice 26 (***)**
Soit $n \in \mathbf{N}$, $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{R})$.
On suppose que $f$ s'annule en $n+1$ points distincts de $I$.

1) Montrer que la dérivée $n$-ième de $f$ s'annule au moins une fois sur $I$.

2) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que la dérivée $(n-1)^{\text{ème}}$ de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur $I$.

**Exercice 27 (***)**
Soit $f$ définie sur un voisinage de 0 et continue en 0.
On suppose que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0.$$

Montrer que $f$ est dérivable en 0.

**Exercice 28 (***)**
Soit $f\ : [0,\, 1] \to \mathbf{R}$, concave, telle que $f(0) \geqslant 0$.
Montrer que

$$\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

## 6 Exercices CCINP

**Exercice 29 (CCINP 3)**

1) On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel $k$, la dérivée d'ordre $k$ des fonctions $g$ et $h$ sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2) On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel $n$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

**Exercice 30 (CCINP 4)**

1) Énoncer le théorème des accroissements finis.

2) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in ]a, b[$.
On suppose que $f$ est continue sur $[a, b]$ et que $f$ est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
Démontrer que, si $f'$ admet une limite finie en $x_0$, alors $f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

3) Prouver que l'implication : ( $f$ est dérivable en $x_0$) $\Longrightarrow$ ($f'$ admet une limite finie en $x_0$) est fausse.

**Indication**: on pourra considérer la fonction $g$ définie par: $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.