

DÉRIVABILITÉ

1 CALCUL

Exercice 1 (*)

Sur quelle(s) partie(s) de \mathbf{R} , les applications suivantes sont-elles continues ? dérivables ? Calculer leur dérivée.

Dans le cas d'un prolongement possible par continuité, étudier la dérivabilité de la fonction prolongée, éventuellement son caractère \mathcal{C}^1 .

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1) $f : x \mapsto 2^{x^2+1}$. | 6) $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x-1} + 1)$. |
| 2) $f : x \mapsto x x $. | 7) $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{ x }} \sin \frac{1}{x}$. |
| 3) $f : x \mapsto \frac{x}{ x +1}$. | 8) $f : x \mapsto (x+1)^{\cos x}$. |
| 4) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$. | 9) $f : x \mapsto (\sqrt{x} + 1)^{\ln x}$. |
| 5) $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$. | 10) (***) $f : x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^{-x}$. |

Exercice 2 (*)

Déterminer les extrémums locaux de $f : x \mapsto x^4 - x^3 + 1$ sur \mathbf{R} .

Exercice 3 (*)

À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \frac{x}{1+x^2} \leq \operatorname{Arctan} x \leq x.$$

Exercice 4 ()**

À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right).$$

Exercice 5 ()**

Soit $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$.

- Montrer que f peut être prolongeable en une application continue sur \mathbf{R} .
On travaillera désormais avec l'application prolongée.
- Faire l'étude des branches infinies de f .
- Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, \exists P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

- En déduire que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} .

Exercice 6 () (Règle de l'Hospital)**

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ et telles que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

- Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

- En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

- Application : calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}.$$

2 FONCTIONS LIPSCHITZIENNES

Exercice 7 (*)

Soient $K_1 \leq K_2$ deux réels positifs.

Comparer les ensembles : $\{f : I \rightarrow \mathbf{R}, f \text{ est } K_1\text{-lipschitzienne sur } I\}$ et $\{f : I \rightarrow \mathbf{R}, f \text{ est } K_2\text{-lipschitzienne sur } I\}$.

Exercice 8 ()**

Soit I un intervalle de \mathbf{R} et $\alpha > 1$. Déterminer toutes les applications vérifiant

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha.$$

3 RAISONNEMENTS THÉORIQUES SIMPLES

Exercice 9 (*)

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable, telle que f' ne s'annule pas. Montrer que f ne peut pas être périodique.

Exercice 10 (*)

Soit f une fonction dérivable sur I .

- Montrer que si f est paire, alors f' est impaire.
Montrer que si f est impaire, alors f' est paire.
- A-t-on les réciproques ?

Exercice 11 (*)

Soit f dérivable en a . Montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Réciproquement, si la limite précédente existe, f est-elle nécessairement dérivable en a ?

Exercice 12 () (à connaître)**

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 scindé à racines simples¹. Montrer que P' est aussi scindé à racines simples.

Exercice 13 ()**

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable, et

$$g : \begin{cases} [0; 1] & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0; \frac{1}{2}] \\ f(2x-1) & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

À quelle(s) condition(s) g est-elle dérivable ?

Exercice 14 ()**

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ telle que $f'(0) = 0$.

Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$f(x) = g(x^2).$$

Exercice 15 () (méthode)**

Soit f dérivable sur $]0, 1[$ et admettant une limite finie commune en 0 et en 1.

- 1) Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.
- 2) Est-ce encore vrai si la limite n'est pas supposée finie ?
- 3) Soit f dérivable sur \mathbf{R} et admettant la même limite finie en $\pm\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

4 CONVEXITÉ**Exercice 16 (*)**

Montrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x.$$

Exercice 17 (*)

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ convexe.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bornée.

Exercice 18 (*)

Soient f et g deux fonctions convexes $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telles que g est croissante.

Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Donner un contre-exemple si g n'est pas croissante.

Exercice 19 (*)

Soit f convexe de $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, montrer que f est continue.

Exercice 20 (*)

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe.

- 1) On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
Montrer que f est positive.
- 2) On suppose que le graphe de f possède la droite $y = ax + b$ comme asymptote oblique en $+\infty$.
Donner la position de f par rapport à son asymptote.

Exercice 21 (*)

Soit f convexe sur \mathbf{R} qui admet un minimum local en a .

Montrer que ce minimum est global.

Exercice 22 (*)**

Soient $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ des réels positifs. Montrer que

$$(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} + (y_1 \cdots y_n)^{\frac{1}{n}} \leq ((x_1 + y_1) \times \cdots \times (x_n + y_n))^{\frac{1}{n}}.$$

Indication : on pourra s'intéresser à la fonction $x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

¹Qui a autant de racines que son degré.

5 APPROFONDISSEMENT

Exercice 23 (*)**

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on considère le polynôme

$$P = (X^2 - 1)^n.$$

- 1) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$$P^{(k)}(-1) = P^{(k)}(1) = 0.$$

- 2) Montrer que $P^{(n)}$ est scindé à racines simples sur \mathbf{R} et que toutes ses racines sont dans $] -1, 1[$:

$$\text{Rac}(P^{(n)}) \subset] -1, 1[.$$

- 3) Calculer $P^{(n)}(1)$.

Exercice 24 (*) (Théorème de Darboux)**

Soit I un intervalle ouvert, $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbf{R})$. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle de \mathbf{R} .

Exercice 25 (*)**

Soit $a > 0$ et f une fonction réelle continue sur $[0, a]$ et dérivable sur $]0, a[$.

On suppose que $f(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]0, a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 26 (*)**

Soit $n \in \mathbf{N}$, I un intervalle de \mathbf{R} et $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$.

On suppose que f s'annule en $n+1$ points distincts de I .

- 1) Montrer que la dérivée n -ième de f s'annule au moins une fois sur I .
- 2) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que la dérivée $(n-1)$ ème de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I .

Exercice 27 (*)**

Soit f définie sur un voisinage de 0 et continue en 0.

On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0.$$

Montrer que f est dérivable en 0.

Exercice 28 (*)**

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, concave, telle que $f(0) \geq 0$.

Montrer que

$$\int_0^1 x f(x) dx \leq \frac{2}{3} \int_0^1 f(x) dx.$$

6 EXERCICES CCINP

Exercice 29 (CCINP 3)

- 1) On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$.

Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définition respectifs.

- 2) On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$.

En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée n ème d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

- 3) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice 30 (CCINP 4)

- 1) Énoncer le théorème des accroissements finis.

- 2) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.

On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.

Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

- 3) Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) \implies (f' admet une limite finie en x_0) est fautive.

Indication: on pourra considérer la fonction g définie par: $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.