

DÉTERMINANTS

1 GROUPE SYMÉTRIQUE

Exercice 1 (*)

Pour tout $\sigma \in S_n$, calculer

$$\sum_{i=1}^n \sigma(i).$$

Exercice 2 (**)

Montrer que pour toute permutation $\sigma \in S_n$,

$$\sigma^{n!} = \text{Id}.$$

Exercice 3 (**)

Montrer que toute permutation $\sigma \in S_n$ peut s'écrire comme produit de transpositions de la forme $(1, i)$ avec $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

Exercice 4 (**)

On définit la fonction

$$f : \begin{cases} S_n & \rightarrow \mathbf{N} \\ \sigma & \mapsto \sum_{k=1}^n k\sigma(k). \end{cases}$$

Montrer que f admet un maximum et un minimum sur S_n et les déterminer.

Exercice 5 (***)

Montrer que la signature est l'unique morphisme non constant de $(S_n, \circ)$ dans $(\mathbf{C}^*, \times)$.

2 RÉVISIONS DE CALCUL MATRICIEL

Exercice 6 (*)

Soient $b_1 = (1, 1, 2)$, $b_2 = (-2, -1, 3)$ et $b_3 = (0, -3, -1)$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$.

- 1) Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
- 2) On note $F = \text{Vect}(b_1, b_2)$ et $G = \text{Vect}(b_3)$, que peut-on dire de F et G ?
- 3) Soit p le projecteur sur F parallèlement à G , exprimer $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(p)$.
- 4) Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$, on note $N = \text{mat}_{\mathcal{C}}(p)$.
Calculer $P = \text{Pa}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, quelle est la relation entre M , N et P ?

Exercice 7 (*)

Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Exercice 8 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^3 - A^2 - 4A = -4I_3$.

Calculer A^p pour tout $p \in \mathbf{N}$.

Exercice 9 (**)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A et A' sont semblables et déterminer la matrice de passage.

Exercice 10 (**)

Les matrices $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ? Si oui, déterminer la matrice de passage.

Exercice 11 (**)

Montrer que toute matrice peut s'écrire comme la somme de deux matrices inversibles.

Exercice 12 (***)

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$, telle que $A + A^{-1} = I_n$. Déterminer $A^k + A^{-k}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Exercice 13 ()**

Soient (u_n) et (v_n) deux suite définies par $u_0 = 2, v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 5u_n - 3v_n \\ v_{n+1} &= 6u_n - 4v_n \end{cases}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

- 1) Donner une relation entre X_{n+1} et X_n en fonction d'une matrice A . En déduire une expression de X_n en fonction de A et de n .
- 2) Déterminer une base de $\ker(A + I_2)$ et de $\ker(A - 2I_2)$.
- 3) En déduire l'existence d'une matrice $P \in \text{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
- 4) Exprimer P .
- 5) Exprimer u_n et v_n en fonction de n .

Exercice 14 (*)**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que $\lambda \in \mathbf{K}$ est valeur propre de f s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ qui vérifie $f(x) = \lambda x$.

- 1) Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbf{K}^k$ k valeurs propres distinctes de f .
Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on note $x_i \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x_i) = \lambda_i x_i$.

- (a) Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbf{K}^k$ tel que $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$.

Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ $\sum_{i=1}^k P(\lambda_i) \alpha_i x_i = 0$.

- (b) Montrer que $(x_1, \dots, x_k)$ forme une famille libre de E .

- 2) On suppose E de dimension finie égale à n et on suppose que $f \in \mathcal{L}(E)$ admet n valeurs propres distinctes.
Montrer qu'il existe une base de E en laquelle la matrice de f est diagonale.
- 3) On suppose toujours $\dim(E) = n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbf{K}^k$ toutes les valeurs propres (distinctes) de f .
Montrer que f est diagonalisable (ie qu'il existe une base en laquelle la matrice de f est diagonale) si, et seulement si $\sum_{i=1}^k \dim(\ker(f - \lambda_i \text{Id})) = n$.

Exercice 15 (*)**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ antisymétrique. Montrer que $A + I_n$ est inversible.

3 CALCULS DE DÉTERMINANTS**Exercice 16 (*)**

Calculer

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 17 (*)

Calculer

$$\begin{vmatrix} (0) & & & a_n \\ & \ddots & & \\ & & a_2 & \\ a_1 & & & (0) \end{vmatrix}.$$

Exercice 18 (*)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

où pour tout $1 \leq k \leq n$ on a $S_k = \sum_{i=1}^k i$.

Exercice 19 ()**

Calculer

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

Exercice 20 ()**

Calculer

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 21 ()**

Calculer

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 22 ()**

Calculer

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 23 () (méthode)**Soit $a \in \mathbf{K}^*$. Pour tout $n \geq 1$, calculer le déterminant de taille n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 2a \end{vmatrix}.$$

Exercice 24 ()**Soit $a \in \mathbf{K}$. Pour tout $n \geq 1$, on définit le déterminant de taille n par :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 1 & & (0) \\ 1 & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Calculer Δ_n pour $a = -1$ et pour $a = 2$.**4 APPLICATIONS LINÉAIRES****Exercice 25 (*)**Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}_n[X])$ défini par

$$f(P) = P + P'.$$

Calculer $\det f$, que peut-on en déduire ?**Exercice 26 (*)**Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension n et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

- 1) Calculer le déterminant du projecteur sur F parallèlement à G .
- 2) Calculer le déterminant de la symétrie sur F parallèlement à G .

Exercice 27 ()**Pour $\sigma \in S_n$, on définit

$$u : \begin{cases} \mathbf{K}^n & \rightarrow \mathbf{K}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{cases}.$$

- 1) Montrer que $u \in \text{GL}(\mathbf{K}^n)$.
- 2) Calculer $\det(u)$.

5 ENTRAÎNEMENT**Exercice 28 (anciennement CCINP 63)**Soit un entier $n \geq 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geq 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n .

- 1) Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
- 2) Déterminer D_n en fonction de n .

Exercice 29 (*)Soient E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.Montrer que si $f^2 = -\text{Id}_E$ alors n est pair.**Exercice 30 (**)**Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on définit $\chi_M = \det(XI_n - M)$.

- 1) Démontrer que $\chi_M \in \mathbf{K}_n[X]$.
Déterminer son terme de plus haut degré et son terme constant.
- 2) En déduire qu'il existe $k_M \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\forall k \geq k_M, \quad M - \frac{1}{k}I_n \in \text{GL}_n(\mathbf{K}).$$

Exercice 31 ()**Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ une matrice à coefficients entiers.Donner une condition nécessaire et suffisante sur son déterminant pour que A soit inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ (que son inverse soit aussi à coefficients entiers).

Exercice 32 ()**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- 1) Montrer que $\det(A + XJ) \in \mathbf{R}_1[X]$ et donner son terme constant.
X représente l'indéterminée des polynômes.
- 2) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ avec $\alpha \neq \beta$ et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & (\alpha) \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ (\beta) & & & a_n \end{vmatrix}.$$

- 3) On suppose A antisymétrique et n pair. Montrer alors que

$$\det(A + XJ) = \det A.$$

Exercice 33 (*)**

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

- 1) Montrer que A est inversible.
- 2) On suppose de plus $\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} > 0$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 34 (*)**

On considère quatre matrices réelles de taille $n \geq 1$: A, B, C, D telles que D inversible et $CD = DC$.

On définit par blocs la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\det(M) = \det(AD - BC).$$

Montrer que ce résultat est encore vrai si D n'est pas inversible.