

FONCTIONS USUELLES

Toutes les études de fonction se font **sans calculatrice**.

1 ÉTUDES QUALITATIVES DE FONCTIONS

Exercice 1 (*) (Courbes)

Tracer les fonctions suivantes (sans calculatrice et avec le minimum de calculs) les fonctions suivantes :

- | | |
|---------------------------------------|----------------------------------|
| 1) $x \mapsto \ln(x-1) + 2.$ | 4) $x \mapsto \frac{3x-2}{x-1}.$ |
| 2) $x \mapsto e^{ x }.$ | 5) $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}.$ |
| 3) $x \mapsto \text{Arcsin}(\sin x).$ | |

Exercice 2 (*) (Symétries)

Les fonctions suivantes sont-elles paires ? impaires ? périodiques ? de quelle période ? symétriques par rapport à un point ? à un axe ?

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1) $x \mapsto \ln(x).$ | 5) $x \mapsto -xe^{x^2-3}.$ |
| 2) $x \mapsto \frac{1+e^x}{1-e^x}.$ | 6) $x \mapsto e^{(x-3)^2+1}.$ |
| 3) $x \mapsto \sin(x^2).$ | 7) $x \mapsto -\ln (x+1)(x+2) .$ |
| 4) $x \mapsto \sin\left(\frac{x+1}{2}\right).$ | 8) $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+4}.$ |

Exercice 3 (**)

Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbf{R} , croissantes.

- Montrer que $f+g$ est croissante.
- Si f et g sont positives, que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$?
- Si f et g sont négatives, que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$?
- Dans le cas général, que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$?

Exercice 4 (***) (Travailler son intuition)

Tracer (sans calculatrice et avec le minimum de calculs) l'allure des fonctions suivantes. L'objectif n'est pas d'obtenir un tracé précis, mais de s'exercer à « sentir » une expression mathématique.

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|---|
| 1) $x \mapsto x \sin x.$ | 2) $x \mapsto x^2 \sin x.$ | 3) $x \mapsto \exp\left(-\frac{x}{2\pi}\right) \sin x.$ |
|--------------------------|----------------------------|---|

2 COMPOSITION

Exercice 5 (*)

On considère les applications

$$f : x \mapsto x^2 + 1 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \ln x.$$

Déterminer les domaines de définition et les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 6 (*)

On considère les applications

$$f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-2} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2.$$

- Donner les ensembles de définition de f et g .
- Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

3 IMAGES DIRECTES ET RÉCIPROQUES

Exercice 7 (*)

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x - 2}.$$

- Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
- Déterminer l'image de f , c'est-à-dire $f(\mathcal{D}_f)$.
- L'application f est-elle injective de \mathcal{D}_f dans \mathbf{R} ?

Exercice 8 (*)

$$f : x \mapsto \sqrt{|x-1|}.$$

- Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
- Déterminer l'image de f , c'est-à-dire $f(\mathcal{D}_f)$.
- L'application f est-elle injective de \mathcal{D}_f dans \mathbf{R} ?

Exercice 9 ()**

$$f : x \mapsto \frac{4x^2}{2x-1}.$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
- 2) Déterminer $\text{Im}(f) = f(\mathcal{D}_f)$.
- 3) L'application f est-elle injective de \mathcal{D}_f dans \mathbf{R} ?
Est-elle surjective entre ces mêmes ensembles ?

4 DÉRIVÉES

Exercice 10 (*)

Déterminer les domaines de définition, de dérivabilité, et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

- | | | |
|---------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|
| 1) $x \mapsto e^{(x^2)}.$ | 3) $x \mapsto e^{2x+1}.$ | 5) $x \mapsto \ln x .$ |
| 2) $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}.$ | 4) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}.$ | 6) $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}.$ |

Exercice 11 ()**

Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité (avec les théorèmes généraux), et calculer les dérivées.

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $x \mapsto \ln x^2 - 3x + 2 .$ | 4) $x \mapsto \text{ch}^2(x).$ |
| 2) $x \mapsto \sqrt{\tan x}.$ | 5) $x \mapsto \ln(\text{th}(x)).$ |
| 3) $x \mapsto \ln^2(x+1).$ | 6) $x \mapsto \ln(\text{ch}(x)).$ |

Exercice 12 ()**

Déterminer les domaines de définition, de dérivabilité, et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

- | | |
|---|--|
| 1) $x \mapsto \sin^3(x).$ | 6) $x \mapsto \sin \frac{1}{x}.$ |
| 2) $x \mapsto \sqrt{\ln(x^2 - x + 1)}.$ | 7) $x \mapsto \frac{\ln(x^2 + 1)}{e^{2x+1} + \sqrt{x}}.$
(ne pas chercher à simplifier) |
| 3) $x \mapsto \sqrt{\ln x^2 - x - 1 }.$ | 8) $x \mapsto \ln(\text{Arctan}(x^2 - 2x + 1)).$ |
| 4) $x \mapsto \text{Arctan}(x^2).$ | |
| 5) $x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{x}.$ | |

5 LIMITES ET BRANCHES ASYMPTOTIQUES

Exercice 13

Étudier les branches asymptotiques aux bords du domaine de définition.

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1) $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 4}.$ | 7) $x \mapsto \ln(x^2 + 1).$ |
| 2) $x \mapsto \sqrt{x^3 - 2x^2 + 4}.$ | 8) $x \mapsto e^{x^2+1} - e^{x^2}.$ |
| 3) $x \mapsto \sqrt{x+4} - \sqrt{x}.$ | 9) $x \mapsto \frac{e^x}{\ln(x)}.$ |
| 4) $x \mapsto \sqrt{x+4} - \sqrt{x-2}.$ | 10) $x \mapsto \ln(e^{2x} - e^x).$ |
| 5) $x \mapsto \sqrt{2x+4} - \sqrt{x-2}.$ | |
| 6) $x \mapsto \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x}.$ | |

6 ÉTUDES COMPLÈTES

Exercice 14 (*) (baccalauréat 1962)

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction

$$f : x \mapsto 2(1 - \cos x) \sin^2(x).$$

Exercice 15 ()**

Étude complète de la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x}.$$

Exercice 16 ()**

Études complètes des fonctions de l'exercice 11.

On pourra se passer des calculs des dérivées et raisonner avec les compositions.

Exercice 17 ()**

Étude complète de la fonction

$$x \mapsto \ln|x^3 + 3x^2 + 3x + 2|.$$

Exercice 18 () (baccalauréat 1962)**

Étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 - 2x + 2}.$$

En déduire le nombre d'extrémités d'arcs¹ u solutions de

$$(E) : (1 - m) \sin^2 u - 2(m + 1) \cos u + 3m + 4 = 0.$$

On posera $\cos u = x$ et l'on discutera suivant les valeurs du paramètre m .

¹Le nombre de $u \in [0, \pi]$ qui sont solution de l'équation.

Exercice 19 (*)**

Étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1 - \sin(x)}{1 + \sin(x)}} \right).$$

7 INJECTIVITÉ-SURJECTIVITÉ**Exercice 20 (**) (applications circulaires réciproques)**

En s'aidant des dérivées :

1) Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2},$$

2) Chercher une expression semblable pour

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \text{ pour } x \neq 0.$$

Exercice 21 ()**Montrer que la fonction sh réalise une bijection de \mathbf{R} dans un intervalle J à préciser, et donner son application réciproque.**Exercice 22 (***)**Montrer que la fonction ch induit une bijection de \mathbf{R}_+ dans un intervalle J à préciser, et donner son application réciproque.**8 BIJECTIVITÉ****Exercice 23 (*) (Bijection continue)**Soit I une partie de \mathbf{R} , $a \leq b$ sont deux points de I .Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, on suppose que $f(a) \leq f(b)$.Montrer à l'aide de contre-exemples que les hypothèses du théorème de la bijection continue sont *minimales* (on ne peut pas en supprimer).**Exercice 24 (*)**

On considère l'application

$$h : x \mapsto \frac{2x + 1}{x + 2}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_h de h .2) Déterminer $\operatorname{Im}(h) = h(\mathcal{D}_h)$ et montrer que h est bijective de \mathcal{D}_h dans $\operatorname{Im}(h)$.
Donner son application réciproque.**Exercice 25 (*)**

Soient

$$f : \begin{cases} \mathbf{R} & \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbf{R}^* & \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto \frac{1 - x^2}{2x}. \end{cases}$$

1) Montrer que la composée $f \circ g$ est bien définie sur \mathbf{R}^* et calculer $(f \circ g)(x)$ pour tout x non nul.Même question pour $g \circ f$.

2) Que peut-on en conclure ?

Exercice 26 ()**Pour $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ avec $c \neq 0$, on définit

$$f : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}.$$

1) Donner le domaine de définition \mathcal{D}_f de f .2) À quelle(s) condition(s) nécessaires et suffisantes sur (a, b, c, d) , l'application est-elle bijective de son domaine de définition sur son image.

Dans ce cas, exprimer son image et l'application réciproque.

Exercice 27 ()**

Pour chaque fonction,

- indiquer le domaine de définition,
- étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité sur \mathbf{R} .

1) $x \mapsto x e^{x^2}$.

3) $x \mapsto e^{\sin x}$.

2) $x \mapsto x \sin x$.

4) $x \mapsto x \lfloor x \rfloor$.

9 SYNTHÈSE ET APPROFONDISSEMENT**Exercice 28 (**)**Pour $(a, b, n) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{N}^*$ calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a + kb).$$

Simplifier l'expression au maximum.

Exercice 29 ()**

On définit les fonctions

$$f : x \mapsto (2x - 1)^2 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \sup_{x \leq t \leq x+1} f(t).$$

Étudier g .

Exercice 30 (*)**

Montrer que $\forall x \in]0, 1[, x^x (1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 31 (*)**

1) Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbf{R}$ du nombre de solutions de l'équation

$$(E_a) \quad x^a = \ln(x).$$

2) Tracer dans un même repère la courbe représentative de $x \mapsto \ln x$ et celle de la fonction $x \mapsto x^{a_0}$ où a_0 est l'unique réel strictement positif tel que l'ensemble des solutions de E_{a_0} soit un singleton.

Exercice 32 (*)**

Pour $0 < a \leq b$, on considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}.$$

Étudier la monotonie de f sur \mathbf{R}_+^* .

En déduire que

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$