

APPLICATIONS LINÉAIRES ET REPRÉSENTATION MATRICIELLE

1 ÉCRITURE MATRICIELLE

Exercice 1 (*)

Soit $M = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

On note u_M l'application linéaire canoniquement associée à M (dans les bases canoniques de $\mathbf{K}^4$ et $\mathbf{K}^3$).

Déterminer des bases de $\ker u_M$ et $\operatorname{Im} u_M$.

Exercice 2 (*)

Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit l'application

$$u : \begin{cases} \mathbf{K}_n[X] & \rightarrow \mathbf{K}_{n+1}[X] \\ P & \mapsto XP(X) \end{cases}$$

- 1) Justifier que $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}_n[X], \mathbf{K}_{n+1}[X])$
- 2) Déterminer, avec le minimum de calculs, le noyau et l'image de u .
- 3) Déterminer la matrice de u entre les bases canoniques de $\mathbf{K}_n[X]$ et $\mathbf{K}_{n+1}[X]$.

Exercice 3 (*)

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit l'application

$$u : \begin{cases} \mathbf{K}_n[X] & \rightarrow \mathbf{K}_n[X] \\ P & \mapsto P(X) - XP'(X) \end{cases}$$

- 1) Justifier que $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}_n[X])$
- 2) Déterminer le noyau et l'image de u .
- 3) Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.

Exercice 4 (**)

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{K}^4$.

Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbf{K}^4$ tel que

- $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$,
- $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$,
- $\ker f = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{K}^4, \text{ tel que } x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}$.

Exercice 5 (*)

Soit E un espace vectoriel de dimension n , et $f \in \operatorname{GL}(E)$.

Montrer qu'il existe deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ telles que la matrice de f entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ soit la matrice identité de taille n .

Exercice 6 (**)

On note $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\phi : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{pmatrix}$.

Montrer que ϕ est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique.

Préciser $\ker \phi$ et $\operatorname{Im} \phi$.

Exercice 7 (**)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

On considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base $\mathcal{E}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Déterminer une base du noyau et de l'image de f .
- 2) De même avec f^2 .
- 3) Vérifier que $E = \operatorname{Im} f^2 \oplus \ker f^2$.

2 ENDOMORPHISMES PARTICULIERS

Exercice 8

Soit $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ définie par $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$,

$$f(x, y, z) = (x, -x + y - z, -x).$$

- 1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$.
- 2) Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
- 3) Calculer M^2 .
- 4) Montrer que M peut s'écrire de façon diagonale dans une certaine base. Déterminer une telle base et donner la matrice de passage.

Exercice 9 (**)

$$\text{Soit } A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est la matrice d'un projecteur dont on déterminera la base et la direction.

Exercice 10 (**)

Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculer A^2 . Qu'en déduire sur f ?
- 2) Montrer que l'on peut construire une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de E telle que la matrice de A dans $\mathcal{B}'$ soit

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donner la matrice de passage.

Exercice 11 (***)

Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ et $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ X & \mapsto X + \text{tr}(AX)B. \end{cases}$

- 1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$.
- 2) Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur A et B pour que f soit une symétrie.
- 3) Dans ce cas, donner la base et la direction de f .

3 CHANGEMENT DE BASE

Exercice 12 (*)

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (2y, x). \end{cases}$$

- 1) Déterminer la matrice $\text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \text{mat}(f, \mathcal{C}, \mathcal{C})$ de f dans la base $\mathcal{C}$.
- 2) Montrer que les vecteurs $b_1 = (1, 1)$ et $b_2 = (-1, 1)$ forment une base de $\mathbf{R}^2$ que l'on notera $\mathcal{B}$.
- 3) Déterminer les matrices $\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, $\text{mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)$ et $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 13 (*)

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$ la base lue en sens inverse.

Exprimer les matrices de passage : $\text{Pa}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $\text{Pa}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Exercice 14 (*)

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbf{R}^3$.

Chercher les applications $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ telles que la matrice de f dans (e_1, e_2, e_3) soit la même que dans (e_2, e_3, e_1) .

Exercice 15 (*)

E est un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E .

On pose $u = -e_1 + e_2 + e_3$, $v = e_1 - e_2 + e_3$, $w = e_1 + e_2 - e_3$.

- 1) Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E et donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et celle de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$.

- 2) Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 16 (*)

Dans $E = \mathbf{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{C}$, on définit les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E .
- Exprimer $\text{Pa}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

Exercice 17 ()**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie,

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$.

Déterminer une base de E où f est représentée par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0_{s,r} & 0_s \\ I_r & 0_{r,s} \end{pmatrix}.$$

Exercice 18 ()**

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A .

- 1) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit D .
- 2) Déterminer la matrice P de $\text{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1} .
- 3) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
- 4) En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

4 RANG**Exercice 19 (**)**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que f est la somme de r endomorphismes de rang 1.

Exercice 20 ()**

Soit $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. f_A est l'endomorphisme défini par $f(X) = AX$.

- 1) Quelle est la matrice de f_A dans $\mathcal{B}$ (en fonction des coefficients de A) ?
- 2) Quel est le rang de f_A ?

Exercice 21 ()**

Soit $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ une matrice diagonale par blocs. Montrer que $\text{rg } M = \text{rg } A + \text{rg } B$.

Exercice 22 (*)**

Soient $\alpha \in \mathbf{R}$ et $n \geq 2$.

On définit la matrice :

$$M_{\alpha,n} = (\cos((i+j)\alpha))_{(i,j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2}.$$

Montrer que

- 1) $\text{rg } M_{\alpha,n} = 2$ si $\alpha \notin \pi\mathbf{Z}$,
- 2) $\text{rg } M_{\alpha,n} = 1$ si $\alpha \in \pi\mathbf{Z}$.

5 ENTRAÎNEMENT**Exercice 23 (classique) (**)**

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent non nul de E . On note p son indice de nilpotence (le plus petit entier tel que $f^p = 0$).

- 1) Soit $x \notin \ker f^{p-1}$.
Montrer que $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
- 2) En déduire que $f^n = 0$.
- 3) On suppose à présent que $n = p$.
Montrer que $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est une base de E .
- 4) Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 24 (*)

On note $E = \mathbf{K}_2[X]$ de degré au plus 2.

φ est l'application de E dans $\mathbf{K}^3$ définie par $\varphi(P) = (P(0), P'(1), P''(2))$.

- 1) Démontrer que φ est un isomorphisme.
- 2) Donner la matrice A de φ dans les bases canoniques de E et de $\mathbf{K}^3$.
- 3) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose $H_i = \varphi^{-1}(e_i)$.
- 4) À l'aide de la matrice A^{-1} , exprimer H_1, H_2, H_3 en fonction de e_1, e_2, e_3 .

Exercice 25 (*)

Soit E un espace de dimension finie muni d'une base $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On note M , la matrice de u dans (e_i) et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$. Montrer que M est triangulaire supérieure si, et seulement si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, E_i est stable par u .

Exercice 26 ()**

Soient E un espace de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) Montrer qu'il existe un polynôme non nul qui annule f .

Indication : montrer que $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ est liée.

- 2) Montrer que si f est inversible, alors f^{-1} est un polynôme en f .

- 3) Soit $P = QR \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme annulateur de f .

On suppose que $Q \wedge R = 1$.

Montrer que $E = \ker(Q(f)) \oplus \ker(R(f))$.

Exercice 27 ()**

Soit E un $\mathbf{R}$ -ev de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ non nulle telle que $f^2 = 0$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 28 ()**

Soit E un espace de dimension fini et f un endomorphisme de E de rang 1.

- 1) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

- 2) Montrer que $\lambda = \text{tr}(f)$.

Exercice 29 (*)**

Montrer que pour tout endomorphisme f , il existe un isomorphisme g tel que $f \circ g$ soit un projecteur.

Exercice 30 (*)**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|.$$

Montrer que $A \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$.

On pourra considérer l'équation $AX = 0$.

Exercice 31 (*)**

Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbf{R})$ $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$ telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $BA = I_2$.

Exercice 32 (*)**

Trouver l'ensemble des matrices qui ne sont semblables qu'à elles-mêmes.

Exercice 33 (CCINP 59 - extrait)

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) de degré inférieur ou égal à n .

On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

- 1) Démontrer que f est bijectif de deux manières:

(a) sans utiliser de matrice de f ,

(b) en utilisant une matrice de f .

- 2) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.

Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?