Les nombres complexes

1 Écriture des nombres complexes

Exercice 1 (*)
Donner la forme algébriques des expressions suivantes

1) Pour $x \in \mathbf{R}$, $(1+ix)(1-ix)$.
2) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$.
3) $\dfrac{1}{1+i\frac{\sqrt{3}}{3}}$.
4) $\dfrac{(2-i)(5+2i)}{3-4i}$.
5) $(1+i)^{2021}$.
6) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n$.

Exercice 2 (*)
Donner la forme exponentielle des expressions suivantes.

1) $\sin x + i\cos x$ pour $x \in \mathbf{R}$.
2) $\dfrac{\mathrm{e}^{ix}-1}{\mathrm{e}^{ix}+1}$ pour $x \in]-\pi,\pi[$.
3) $-2i\,\mathrm{e}^{ix}$ pour $x \in \mathbf{R}$.
4) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1+i)^3}$.
5) $(1+i)^{2020}-(1-i)^{2020}$.

Exercice 3 (**)
Mettre sous forme polaire ($\alpha \in \mathbf{R}$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$).
⚠ le module est un réel positif.

1) $1-i\tan\alpha \quad \left(\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$.
2) $1-\mathrm{e}^{-i\alpha}$.
3) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{iy}}$.
4) $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{1+i}\right)^{2020}$.
5) (***) $\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Exercice 4 (*)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} i^k$.

2 Interprétation géométrique

Exercice 5 (*)
Interpréter géométriquement les expressions suivantes

1) $|z| \leqslant 1$.
2) $|z-i| < 2$.
3) $|2z+i-1| > 1$.
4) $\mathfrak{Re}\,(z) \geqslant -1$.
5) $\mathfrak{Im}\,(z) < 0$.
6) $0 \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{\pi}{6}$.
7) $0 \leqslant \arg(\frac{z}{1-i}) \leqslant \frac{\pi}{4}$.
8) $|z-i| = |z+1|$.

Exercice 6
On note $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Déterminer les points M d'affixe z tels que les points d'affixe j, z, jz soient alignés.

Exercice 7 (*)
Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant ces conditions et interpréter géométriquement les solutions.

1) $\dfrac{z}{z-i} \in \mathbf{R}$.
2) $z^3 \in \mathbf{R}$.
3) $\dfrac{1-iz}{1+iz} \in \mathbf{R}$.

Exercice 8 (*)
Montrer que $\forall (z,z') \in \mathbf{C}^2$

$$2\left(|z|^2+|z'|^2\right) = |z+z'|^2+|z-z'|^2\,.$$

Interpréter géométriquement.

Exercice 9 (***) (Autour du nombre j)
On pose $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.
On considère trois points du plan complexe A, B, C, d'affixes respectives a, b, c.

1) Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct si, et seulement si

$$a + jb + j^2c = 0\,.$$

2) En déduire que ABC est équilatéral si, et seulement si

$$a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc) = 0\,.$$

3 Résolution d'équations

Exercice 10 (*)

1) Donner les racines carrées de i et $1+i$.
2) Donner les racines cubiques de $-1+i$.
3) Donner les racines 4^{e} de $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$.

Exercice 11 (*)
Trouver deux nombres complexes dont la somme est -1 et le produit est 1. Sont-ce les seuls ?

Exercice 12 (*)
Pour quelles valeurs de $n \in \mathbf{N}$, $(1+i)^n$ est-il réel ?

Exercice 13 (*)
Résoudre sur $\mathbf{C}$, les équations :

1) $|\overline{z}+1-i|=4$.
2) $2z+6\overline{z}=3+2i$.
3) $z^2=|z|$.

Exercice 14 (*)
Résoudre sur $\mathbf{C}$, les équations :

1) $z^2+z+1=0$.
2) $z^2+2z+4=0$.
3) $z^2+3\sqrt{3}z+9=0$.
4) $z^2+2z-\sqrt{2}=0$.
5) $z^3+z^2+z=0$.

Exercice 15 (**)
Résoudre sur $\mathbf{C}$, les équations :

1) $z^2-(1+i\sqrt{3})z-1+i\sqrt{3}=0$.
2) $z^2-2(2+i)z+6+8i=0$.
3) $z^3+(i-1)z^2-(i-2)z=2$.
4) $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$.

Exercice 16 (*)
Résoudre sur $\mathbf{C}$, les équations :

1) $\mathrm{e}^z=5+5i$.
2) $\mathrm{e}^{2z}=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$.

Exercice 17 (*)
Trouver tous les couples $(u,v)\in\mathbf{C}^2$ solution du système

$$\begin{cases} u+v &= i-1 \\ uv &= -5i \end{cases}.$$

Exercice 18 (**)
Trouver tous les couples $(u,v)\in\mathbf{C}^2$ solution du système

$$\begin{cases} u^2+v^2 &= 0 \\ uv &= 1 \end{cases}.$$

Exercice 19 (***)
Trouver l'ensemble des $z\in\mathbf{C}$ tels que

$$\overline{z}(z-1)=z^2(\overline{z-1}).$$

Exercice 20 (***)
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(A,B,C)\in\mathbf{C}^3$ pour que

$$\forall z\in\mathbf{U},\quad Az+B\overline{z}+C=0.$$

4 Trigonométrie

Exercice 21 (*)
Linéariser

1) $\cos^4 x\sin x$.
2) $\sin^2 x\cos^3 x$.
3) $\cos^4 x\sin^3 x$.

Exercice 22 (**)
Résoudre $\sin\,x+\sin\,2x+\sin\,3x=0$.

Exercice 23 (***)
Calculer $\sin(5a)$ en fonction de $\sin a$ et de ses différentes puissances.
En déduire la valeur de $\sin(\frac{\pi}{5})$.

5 Sommes et produits

Exercice 24 (*)
Soit $\rho>0$ et $\theta\in\mathbf{R}$, on considère $z=\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$.
Exprimer simplement en fonction de ρ, θ et des $\cos(k\theta)$ pour $k\in[\![1,\,n]\!]$ le produit

$$P_n=\prod_{k=0}^{n}\left(z^k+\overline{z}^k\right).$$

(il reste un produit dans le résultat).

Exercice 25 (*)
Soient $\theta \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, Donner une expression, sans le signe $\sum$, de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta).$$

Exercice 26 (***)
Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer les sommes :

$$T_1 = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k} \qquad \text{et} \qquad T_2 = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}.$$

Exercice 27 (***)
Calculer, pour $n \geqslant 3$, les trois sommes

$$A = \sum_{0 \leqslant 3k \leqslant n} \binom{n}{3k}, \qquad B = \sum_{0 \leqslant 3k+1 \leqslant n} \binom{n}{3k+1}, \qquad C = \sum_{0 \leqslant 3k+2 \leqslant n} \binom{n}{3k+2}.$$

6 Transformations géométriques

Exercice 28 (*)
Décrire les transformations géométriques associées aux applications suivantes ($\theta \in \mathbf{R}$).

1) $f_1 : z \mapsto (1-i)z + i$.
2) $f_2 : z \mapsto \mathrm{e}^{i\theta}(z - 2i + 3)$.

Exercice 29 (*)

1) Déterminer l'expression complexe de la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centre $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.
2) Déterminer l'expression complexe de la symétrie centrale de centre $1+i$.

Exercice 30 (***)
Déterminer l'expression complexe de la symétrie axiale d'axe $y = 2x$.

Exercice 31 (***)
Décrire la transformation géométrique associée à l'application suivante

$$f_1 : z \mapsto (1 - \overline{z}).$$

Exercice 32 (* *)**
Déterminer les droites du plan complexe qui ont pour image une (portion de) droite par l'application exponentielle.
Indication : faire des schémas.

7 Exercices CCINP

Exercices à savoir refaire pour le concours.

Exercice 33 (CCINP 84)

1) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3) En déduire, pour $n \in \mathbf{N}^*$, les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 34 (CCINP 89)
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}$.

1) On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2) On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.