Polynômes à une indéterminée

1 Manipulations algébriques

Exercice 1 (*)
Calculer les produits de P et Q.

1) $P = 1 + X + 3X^2 - X^5$ et $Q = X$.
2) $P = 1 + X + 3X^2 - X^5$ et $Q = X + X^2 - X^4$.
3) $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$ et $Q = X - 1$.

Exercice 2 (*)
Effectuer la division euclidienne de P par Q pour

1) $P = 5X^5 + X^4 + 2X^3 - 1$ et $Q = X^2 + X - 1$.
2) $P = X^7$ et $Q = X^3 - X + 1$.

Exercice 3 (**)
Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, et $a \neq b$.
Donner le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
Que peut-on dire du cas $a = b$?

Exercice 4 (**)
Déterminer tous les polynômes P de degré 3 tel que $(X-1)|P$ et tel que les restes des divisions euclidiennes par $X-2$, par $X-3$ et par $X-4$ soient les mêmes.

Exercice 5 (**)

1) À l'aide du polynôme $P = (1+X)^n$, montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \in [\![1, n]\!],\ \ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

2) À l'aide du polynôme $P = (1+X)^{2n}$, montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

3) Montrer que $\forall (m, n, p) \in \mathbf{N}^3,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}$.

2 Racines et factorisation

Exercice 6 (*)
Factoriser sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$ en produit d'irréductibles.

1) $P_1 = X^3 - X^2 - 2\,X$.
2) $P_2 = X^8 - 3\,X^7 + 4\,X^6 - 5\,X^5 + 4\,X^4 - X^3 + X - 1$.
3) $P_3 = X^7 - X^2$.
4) $P_4 = 2\,X^4 - 10\,X^3 + 24\,X^2 - 28\,X + 16$.
   Indication : on sait que $(1+i)$ est racine.
5) $P_5 = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$.
6) $P_6 = X^4 - 2\,X^3 + 4\,X^2 + 2\,X - 5$.
7) $P_7 = X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$.

Exercice 7 (*)
Factoriser sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$ en produit d'irréductibles.

$$P_8 = X^4 - X^2 + 1.$$

Exercice 8 (**) (À connaître)
Montrer que tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré 3 admet au moins une racine réelle.

Exercice 9 (**)
On considère le polynôme

$$P = (X+1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1.$$

1) Montrer que $X^2 + X$ divise P.
2) Est-ce que (-1) est racine double de P ?

Exercice 10 (*)
Soit $\alpha \in \mathbf{K}$ et $P \in \mathbf{K}[X]$.
Montrer que α racine double de P si, et seulement si α est racine simple de $P \wedge P'$.

Exercice 11 (**)

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbf{C}[X]$$

avec $a \neq 0$ et de racines x, y, z.

1) Exprimer $x+y+z$, $xy+xz+yz$ et xyz en fonction de a, b, c, d.

2) Résoudre dans $\mathbf{C}^3$ les systèmes suivants :
$$(1) \begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=2 \\ xyz=0 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{6} \end{cases}.$$

Exercice 12 (**)
Soient $P \in \mathbf{C}[X]$ et $n \in \mathbf{N}$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X-1$, alors il l'est aussi par $X^n - 1$.

Exercice 13 (**) (méthode... et digressions)
Un polynôme non nul est dit *palindrome* si ses coefficients sont symétriques :
Si $\deg P = n$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = a_{n-k}.$$

1) Montrer que P de degré n est palindrome si, et seulement si $\forall x \neq 0$,
$$P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right).$$

2) Montrer que si P est palindrome et $\deg P$ est impair, alors on peut écrire $P = (X+1)Q$ avec Q un polynôme palindrome.

3) Factoriser $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ en produit d'irréductibles.
Méthode : Pour P palindrome de degré $2n$, on admet que l'on peut trouver un polynôme Q de degré n tel que
$$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ P(x) = x^n Q\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

4) Montrer que l'ensemble des polynômes palindromes est stable par produit.

5) Montrer que si 1 est racine d'un polynôme palindrome, alors il est au moins racine double.

6) Plus généralement, montrer que la multiplicité de 1 dans un polynome palindrome est nécessairement paire.

3 Fonctions polynomiales

Exercice 14 (*)
Pour chacune des fonctions suivantes (éventuellement prolongée par continuité), dire si elle est polynomiale et le justifier.

1) $f : x \mapsto \cos x$

2) $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$

3) $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^{2016} - (1-x)^{2016}}{x}$

4) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

4 Équations de polynômes

Exercice 15 (*)
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbf{K}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.

Exercice 16 (**)
Résoudre les équations suivantes d'inconnue $P \in \mathbf{R}[X]$.

1) $P = P'P''$.

2) $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

3) $(P')^2 = 4P$.

Exercice 17
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que

$$(X+4)P(X) = XP(X+1).$$

Exercice 18 (**)
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ P(x) \in \mathbf{R}.$$

Exercice 19 (***)
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que P' divise P.

5 Matrices

Exercice 20 (**)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $(A - 6I)(A^2 - 3I) = 0$.
   On dit que $P = (X - 6)(X^2 - 3)$ est un polynôme annulateur de A.

2) Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer A^n.

6 Entraînement

Exercice 21 (*)
On définit une suite de polynômes (P_n) par

$$P_0 = 1,\ P_1 = X \text{ et } \forall n \geqslant 0, \qquad P_{n+2} + P_n = 2XP_{n+1}.$$

1) Calculer P_2 et P_3.

2) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.

3) Déterminer la parité de P_n.
   Calculer $P_n(1)$, puis $P_n(-1)$.

Exercice 22 (**)
Soit $n \geqslant 2$ et $\xi = \mathrm{e}^{2i\frac{\pi}{n}}$.

1) Montrer que $\forall z \in \mathbf{C}$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(z - \xi^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

2) En déduire

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(k\frac{\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 23 (**)
Soit $P \in \mathbf{K}[X]$.

1) Montrer que pour tout $a \in \mathbf{K}$,

$$P(X + a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} P^{(k)}(X).$$

2) Déterminer tous les polynômes dans $\mathbf{R}[X]$ qui vérifient

$$P(X + 1) - 2P(X) + P(X - 1) = 0.$$

Exercice 24 (**)
Soient A et B, deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$ premiers entre eux.
Soient a et b appartenant à $\mathbf{K}$, distincts.

1) Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P + a$ soit divisible par A et $P + b$ soit divisible par B.

2) Application numérique : $A = X^2 + 1$, $B = X^3 + 1$, $a = 1$ et $b = -1$.

Exercice 25 (**)
Soient p et q deux entiers supérieurs à deux et premiers entre eux.
Montrer que

$$\left(X^p - 1\right)\left(X^q - 1\right) \mid \left(X - 1\right)\left(X^{pq} - 1\right).$$

Exercice 26 (**)
À quelle condition $P = X^3 + pX + q$ admet-il une racine multiple dans $\mathbf{C}$?

Exercice 27 (**)
Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![1,\, n+1]\!]$, $P(k) = \frac{1}{k}$.
Calculer $P(0)$.

Exercice 28 (***)
Pour quelles valeurs de $a \in \mathbf{R}$, le polynôme

$$P = (a + 3)X^3 - aX^2 - (a + 2)X + a$$

admet-il une racine complexe de module 1.

Exercice 29 (***)
Trouver tous les polynômes non nuls $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que

$$P(X^2) = P(X)P(X - 1).$$

Exercice 30 (***)
Soit $\theta \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbf{N}$.

On définit la fonction cotangente par $\operatorname{cotan}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ lorsque cela est défini.

1) Montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que
$$\sin((2n+1)\theta) = (\sin\theta)^{2n+1} P_n(\operatorname{cotan}^2\theta).$$
2) Expliciter P_n.
3) (a) Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ est racine de P_n.
(b) Montrer que P_n est scindé sur $\mathbf{R}$.
4) En déduire que
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$
5) (a) Vérifier que pour tout $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,
$$0 < \sin a < a < \tan a.$$
(b) Calculer $1 + \operatorname{cotan}^2 a$ en fonction de $\sin a$.
(c) En déduire que pour tout $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,
$$\operatorname{cotan}^2 a < \frac{1}{a^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2 a.$$
6) Montrer la limite :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

7 Exercices CCINP

Exercice 31 (CCINP 85)
Formulation adaptée pour le début de la MPSI

1) Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $P \in \mathbf{R}_n[X]$ et $a \in \mathbf{R}$.
(a) Énoncer sans démonstration la formule de Taylor au point a.
(b) Soit $r \in \mathbf{N}^*$. En déduire que :
$(X-a)^r | P$ et $(X-a)^{r+1} \not| P$ si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2) Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 32 (CCINP 87)
Formulation adaptée pour le début de la MPSI
Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_k \in \mathbf{K}_n[X]$ vérifiant
$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ L_k(a_i)) = \delta_{i,j}.$$
2) Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ vérifiant
$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$
3) Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.