

# POLYNÔMES À UNE INDÉTERMINÉE

## 1 MANIPULATIONS ALGÈBRIQUES

### Exercice 1 (\*)

Calculer les produits de  $P$  et  $Q$ .

- 1)  $P = 1 + X + 3X^2 - X^5$  et  $Q = X$ .
- 2)  $P = 1 + X + 3X^2 - X^5$  et  $Q = X + X^2 - X^4$ .
- 3)  $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$  et  $Q = X - 1$ .

### Exercice 2 (\*)

Effectuer la division euclidienne de  $P$  par  $Q$  pour

- 1)  $P = 5X^5 + X^4 + 2X^3 - 1$  et  $Q = X^2 + X - 1$ .
- 2)  $P = X^7$  et  $Q = X^3 - X + 1$ .

### Exercice 3 (\*\*)

Soit  $P \in \mathbf{K}[X]$ , et  $a \neq b$ .

Donner le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$ .

Que peut-on dire du cas  $a = b$  ?

### Exercice 4 (\*\*)

Déterminer tous les polynômes  $P$  de degré 3 tel que  $(X - 1)|P$  et tel que les restes des divisions euclidiennes par  $X - 2$ , par  $X - 3$  et par  $X - 4$  soient les mêmes.

### Exercice 5 (\*\*)

- 1) À l'aide du polynôme  $P = (1 + X)^n$ , montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

- 2) À l'aide du polynôme  $P = (1 + X)^{2n}$ , montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

- 3) Montrer que  $\forall (m, n, p) \in \mathbf{N}^3, \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}$ .

## 2 RACINES ET FACTORISATION

### Exercice 6 (\*)

Factoriser sur  $\mathbf{R}$  et sur  $\mathbf{C}$  en produit d'irréductibles.

- 1)  $P_1 = X^3 - X^2 - 2X$ .
- 2)  $P_2 = X^8 - 3X^7 + 4X^6 - 5X^5 + 4X^4 - X^3 + X - 1$ .
- 3)  $P_3 = X^7 - X^2$ .
- 4)  $P_4 = 2X^4 - 10X^3 + 24X^2 - 28X + 16$ .  
*Indication* : on sait que  $(1 + i)$  est racine.
- 5)  $P_5 = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$ .
- 6)  $P_6 = X^4 - 2X^3 + 4X^2 + 2X - 5$ .
- 7)  $P_7 = X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$ .

### Exercice 7 (\*)

Factoriser sur  $\mathbf{R}$  et sur  $\mathbf{C}$  en produit d'irréductibles.

$$P_8 = X^4 - X^2 + 1.$$

### Exercice 8 (\*\*)

(À connaître)

Montrer que tout polynôme  $P \in \mathbf{R}[X]$  de degré 3 admet au moins une racine réelle.

### Exercice 9 (\*\*)

On considère le polynôme

$$P = (X + 1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1.$$

- 1) Montrer que  $X^2 + X$  divise  $P$ .
- 2) Est-ce que  $(-1)$  est racine double de  $P$  ?

### Exercice 10 (\*)

Soit  $\alpha \in \mathbf{K}$  et  $P \in \mathbf{K}[X]$ .

Montrer que  $\alpha$  racine double de  $P$  si, et seulement si  $\alpha$  est racine simple de  $P \wedge P'$ .

**Exercice 11 (\*\*)**

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbf{C}[X]$$

avec  $a \neq 0$  et de racines  $x, y, z$ .

- 1) Exprimer  $x + y + z$ ,  $xy + xz + yz$  et  $xyz$  en fonction de  $a, b, c, d$ .
- 2) Résoudre dans  $\mathbf{C}^3$  les systèmes suivants :

$$(1) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ xyz = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6} \end{cases} .$$

**Exercice 12 (\*\*)**

Soient  $P \in \mathbf{C}[X]$  et  $n \in \mathbf{N}$ . Montrer que si  $P(X^n)$  est divisible par  $X - 1$ , alors il l'est aussi par  $X^n - 1$ .

**Exercice 13 (\*\*) (méthode... et digressions)**

Un polynôme non nul est dit *palindrome* si ses coefficients sont symétriques :

Si  $\deg P = n$  et  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , alors

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = a_{n-k}.$$

- 1) Montrer que  $P$  de degré  $n$  est palindrome si, et seulement si  $\forall x \neq 0$ ,

$$P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right).$$

- 2) Montrer que si  $P$  est palindrome et  $\deg P$  est impair, alors on peut écrire  $P = (X + 1)Q$  avec  $Q$  un polynôme palindrome.
- 3) Factoriser  $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$  en produit d'irréductibles.  
*Méthode* : Pour  $P$  palindrome de degré  $2n$ , on admet que l'on peut trouver un polynôme  $Q$  de degré  $n$  tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, P(x) = x^n Q\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

- 4) Montrer que l'ensemble des polynômes palindromes est stable par produit.
- 5) Montrer que si 1 est racine d'un polynôme palindrome, alors il est au moins racine double.
- 6) Plus généralement, montrer que la multiplicité de 1 dans un polynôme palindrome est nécessairement paire.

**3 FONCTIONS POLYNOMIALES**

**Exercice 14 (\*)**

Pour chacune des fonctions suivantes (éventuellement prolongée par continuité), dire si elle est polynomiale et le justifier.

- 1)  $f : x \mapsto \cos x$
- 2)  $f : x \mapsto e^x$
- 3)  $f : x \mapsto \frac{(x+1)^{2016} - (1-x)^{2016}}{x}$
- 4)  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

**4 ÉQUATIONS DE POLYNÔMES**

**Exercice 15 (\*)**

Trouver tous les polynômes  $P \in \mathbf{K}[X]$  tels que  $P(X + 1) = P(X)$ .

**Exercice 16 (\*\*)**

Résoudre les équations suivantes d'inconnue  $P \in \mathbf{R}[X]$ .

- 1)  $P = P'P''$ .
- 2)  $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ .
- 3)  $(P')^2 = 4P$ .

**Exercice 17 (\*\*)**

Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbf{C}[X]$  tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}, P(x) \in \mathbf{R}.$$

**Exercice 18 (\*\*\*)**

Trouver tous les polynômes  $P \in \mathbf{R}[X]$  tels que  $P'$  divise  $P$ .

**5 MATRICES**

**Exercice 19 (\*\*)**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

- 1) Vérifier que  $(A - 6I)(A^2 - 3I) = 0$ .  
On dit que  $P = (X - 6)(X^2 - 3)$  est un polynôme annulateur de  $A$ .
- 2) Pour  $n \in \mathbf{N}$ , calculer  $A^n$ .

## 6 ENTRAÎNEMENT

**Exercice 20 (\*)**

On définit une suite de polynômes  $(P_n)$  par

$$P_0 = 1, P_1 = X \text{ et } \forall n \geq 0, \quad P_{n+2} + P_n = 2XP_{n+1}.$$

- 1) Calculer  $P_2$  et  $P_3$ .
- 2) Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $P_n$ .
- 3) Déterminer la parité de  $P_n$ .  
Calculer  $\widetilde{P}_n(1)$ , puis  $\widetilde{P}_n(-1)$ .

**Exercice 21 (\*\*)**

Soit  $n \geq 2$  et  $\xi = e^{2i\frac{\pi}{n}}$ .

- 1) Montrer que  $\forall z \in \mathbf{C}$ ,

$$\prod_{k=1}^{n-1} (z - \xi^k) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

- 2) En déduire

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(k\frac{\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

**Exercice 22 (\*\*)**

Soient  $A$  et  $B$ , deux polynômes de  $\mathbf{K}[X]$  premiers entre eux. Soient  $a$  et  $b$  appartenant à  $\mathbf{K}$ , distincts.

- 1) Déterminer l'ensemble des polynômes  $P$  tels que  $P + a$  soit divisible par  $A$  et  $P + b$  soit divisible par  $B$ .
- 2) Application numérique :  $A = X^2 + 1$ ,  $B = X^3 + 1$ ,  $a = 1$  et  $b = -1$ .

**Exercice 23 (\*\*)**

Soient  $p$  et  $q$  deux entiers supérieurs à deux et premiers entre eux. Montrer que

$$(X^p - 1)(X^q - 1) \mid (X - 1)(X^{pq} - 1).$$

**Exercice 24 (\*\*)**

À quelle condition  $P = X^3 + pX + q$  admet-il une racine multiple dans  $\mathbf{C}$  ?

**Exercice 25 (\*\*)**

Soit  $P \in \mathbf{R}_n[X]$  tel que  $\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ,  $P(k) = \frac{1}{k}$ . Calculer  $P(0)$ .

**Exercice 26 (\*\*)**

Soit  $P \in \mathbf{K}[X]$ .

- 1) Montrer que pour tout  $a \in \mathbf{K}$ ,

$$P(X + a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} P^{(k)}(X).$$

- 2) Déterminer tous les polynômes dans  $\mathbf{R}[X]$  qui vérifient

$$P(X + 1) - 2P(X) + P(X - 1) = 0.$$

**Exercice 27 (\*\*\*) (calculatoire)**

Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose  $P_n = X^n + 1$ .

Factoriser  $P_n$  sur  $\mathbf{R}$  et sur  $\mathbf{C}$  en produit d'irréductibles.

**Exercice 28 (\*\*\*)**

Pour quelles valeurs de  $a \in \mathbf{R}$ , le polynôme

$$P = (a + 3)X^3 - aX^2 - (a + 2)X + a$$

admet-il une racine complexe de module 1.

**Exercice 29 (\*\*\*)**

Trouver tous les polynômes non nuls  $P \in \mathbf{R}[X]$  tels que

$$P(X^2) = P(X)P(X - 1).$$

**Exercice 30 (\*\*\*)**

Soit  $\theta \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  et  $n \in \mathbf{N}$ .

On définit la fonction cotangente par  $\cotan \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$  lorsque cela est défini.

1) Montrer qu'il existe un polynôme  $P_n$  tel que

$$\sin((2n+1)\theta) = (\sin \theta)^{2n+1} P_n(\cotan^2 \theta).$$

2) Expliciter  $P_n$ .

3) (a) Montrer que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$  est racine de  $P_n$ .

(b) Montrer que  $P_n$  est scindé sur  $\mathbf{R}$ .

4) En déduire que

$$s_n = \sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

5) (a) Vérifier que pour tout  $a \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ ,

$$0 < \sin a < a < \tan a.$$

(b) Calculer  $1 + \cotan^2 a$  en fonction de  $\sin a$ .

(c) En déduire que pour tout  $a \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ ,

$$\cotan^2 a < \frac{1}{a^2} < 1 + \cotan^2 a.$$

6) Montrer la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**7 EXERCICES CCINP**

**Exercice 31 (Exercice 85 CCINP)**

1) Soient  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $P \in \mathbf{R}_n[X]$  et  $a \in \mathbf{R}$ .

(a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de  $P(X)$  dans la base  $(1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ .

(b) Soit  $r \in \mathbf{N}^*$ . En déduire que :

$a$  est une racine de  $P$  d'ordre de multiplicité  $r$  si et seulement si  $P^{(r)}(a) \neq 0$  et  $\forall k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ ,  $P^{(k)}(a) = 0$ .

2) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  pour que 1 soit racine double du polynôme  $P = X^5 + aX^2 + bX$  et factoriser alors ce polynôme dans  $\mathbf{R}[X]$ .

**Exercice 32 (Exercice 87 CCINP)**

Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$ ,  $n+1$  réels deux à deux distincts.

1) Montrer que si  $b_0, b_1, \dots, b_n$  sont  $n+1$  réels quelconques, alors il existe un unique polynôme  $P$  vérifiant

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i.$$

2) Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Expliciter ce polynôme  $P$ , que l'on notera  $L_k$ , lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3) Prouver que  $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$ .

**Exercice 33 (Exercice 90 CCINP)**

$\mathbf{K}$  désigne le corps des réels ou celui des complexes.

Soient  $a_1, a_2, a_3$  trois scalaires distincts donnés de  $\mathbf{K}$ .

1) Montrer que  $\Phi : \mathbf{K}_2[X] \xrightarrow{P} \mathbf{K}^3 \xrightarrow{(P(a_1), P(a_2), P(a_3))}$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2) On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbf{K}^3$  et on pose  $\forall k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$ .

(a) Justifier que  $(L_1, L_2, L_3)$  est une base de  $\mathbf{K}_2[X]$ .

(b) Exprimer les polynômes  $L_1, L_2$  et  $L_3$  en fonction de  $a_1, a_2$  et  $a_3$ .

3) Soit  $P \in \mathbf{K}_2[X]$ . Déterminer les coordonnées de  $P$  dans la base  $(L_1, L_2, L_3)$ .

4) **Application** : on se place dans  $\mathbf{R}^2$  muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points  $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$ .

Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points  $A, B$  et  $C$ .