Primitives et intégration

1 Recherche de primitives simples

Exercice 1 (*)

Préciser si F est une primitive de f.

1. $F(x) = x + 1$ et $f(x) = 1$
2. $F(x) = x^2 - 5x + 3$ et $f(x) = x - 5$
3. $F(x) = x^x$ et $f(x) = (\ln x + 1)\, x^x$
4. $F(x) = 2x - 1$ et $f(x) = x^2 - x$
5. $F(x) = \dfrac{1}{x}$ et $f(x) = \ln|x|$

Exercice 2 (*)

Trouver les primitives pour chacune des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto e^{3t}$
2. $t \mapsto \sin\left(\dfrac{t}{5}\right)$
3. $t \mapsto t^5 + 2t^3 - t - 1$
4. $t \mapsto (t-1)(t+1)$
5. $t \mapsto \cos^2(t) + \sin^2(t)$
6. $t \mapsto \cos^2(t) - \sin^2(t)$
7. $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$
8. $t \mapsto \ln(t+1)$
9. $t \mapsto t(t^2+1)^n$
10. $t \mapsto \dfrac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$
11. $t \mapsto \sin(t)\cos^5(t)$

Exercice 3 (*)

Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto \tan(t)$
2. $t \mapsto \dfrac{t+2}{t^2+4t}$
3. $t \mapsto \dfrac{t+2}{\sqrt{t^2+4t}}$
4. $t \mapsto t\, e^{5t^2}$
5. $t \mapsto \sin(t)\cos(t)$
6. $t \mapsto \dfrac{t}{t^2-5}$
7. $t \mapsto \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$
8. $t \mapsto \tan^2(t)$
9. $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{\cos^3(t)}$

Exercice 4 (**)

Calculer

1. $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln^4 t}{t}\,dt$
2. $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t\ln t}$
3. $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\cos^2(t)\sqrt{\tan(t)}}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx.$

Exercice 5 (***)

Calculer

1. $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t - 1}{t^2}\,dt$
2. $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,dt$
3. $\displaystyle\int_1^x e^t\left(\frac{1}{t} + \ln t\right)dt$
4. $\displaystyle\int_1^x \frac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^2}\,dt$

2 Intégrations par parties

Exercice 6 (*)

À l'aide d'intégrations par parties, calculer

1. $\displaystyle\int_0^1 t\,e^t\,dt$
2. $\displaystyle\int_1^e t^2\ln t\,dt$
3. $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\,dt$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(t)\,dt$
5. $\displaystyle\int_0^x t\cos(t)\,dt$
6. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(t^2+5t+6\right)\cos(2t)\,dt$

Exercice 7 (**)

1. Calculer la dérivée de $t \mapsto \dfrac{1}{\tan(t)}$.
2. En déduire, grâce à une intégration par parties une primitive
$$\int_1^x \frac{t}{\sin^2(t)}\,dt.$$

Exercice 8 (***)

À l'aide d'intégrations par parties, calculer

1. $\displaystyle\int_0^1 e^t\cos(t)\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 t\arctan(t)\,dt$

3 Changements de variable

Exercice 9 (*)

En s'aidant à chaque fois d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_e^x \frac{\ln(\ln t)}{t}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^x e^{2t}\cos\left(e^t\right)\,dt$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4(t)\,dt$ avec $u(t) = \tan(t)$

Exercice 10 (***)
Calculer

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{u}{2}\right) \ln(1+\cos(u))\,\mathrm{d}u$$

On pourra poser $t = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$.

Exercice 11 (***)
Soient $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$
et $C = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $C = S$ grâce à un changement de variables.
2. Que vaut $C+S$. En déduire les valeurs de C et de S.
3. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}$
   (on pourra utiliser un changement de variable)

4 Primitives de fonctions circulaires

Exercice 12 (**)
Calculer

1. $\displaystyle\int_0^x \cos^3(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^x \cos^3(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^x \cos^3(t)\sin^4(2t)\,\mathrm{d}t$

5 Sommes de Riemann

Exercice 13 (*)
Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}.$$

Exercice 14 (**)
Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

6 Exercices simple d'intégration

Exercice 15 (*)
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$.
Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$, alors f admet un point fixe.

Exercice 16 (**)
On définit f sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ par

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ f(x) \leqslant x$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 17 (Dérivabilité)
Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée.

1. $x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.
2. $x \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos^5(tx)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 18 (**)
On définit la fonction F par

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{3-\cos(t)}$$

1. Étudier la parité et la dérivabilité de F.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}, F(x+2\pi) = F(x) + F(2\pi)$.
3. (a) (***) En s'aidant du changement de variable $u = \tan(t/2)$, calculer $F(x)$ sur $]-\pi,\pi[$.
   (b) En déduire $F(2\pi)$.
   (c) Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

7 Utilisation de la continuité

Exercice 19 (**)
Soit
$$F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier la définition et la régularité de F sur $[0,\pi]$.
2. Calculer[1] $F(x)$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
3. Calculer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$
4. En utilisant un argument de symétrie, en déduire la valeur de $F(\pi)$.

Exercice 20 (***)
Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}_+)$.
Le but de cet exercice est de déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}}$$
On pose $M = \sup_{[a,b]} f$.

1. Justifier l'existence de M, et montrer que $M \in \mathbf{R}_+$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M(b-a)^{\frac{1}{n}}$.
3. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que, $\forall n > N_1, \quad \left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M+\varepsilon$.
   (b) Montrer qu'il existe un intervalle $J=[c,d]$, non réduit à un point, inclus dans $[a,b]$, tel que, pour tout $t \in J$, on ait $f(t) \geqslant M - \frac{\varepsilon}{2}$.
4. Conclure.

Exercice 21 (classique : l'inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient $f,g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$, montrer que
$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2 \int_a^b g^2}$$
Indication : Étudier l'application $\lambda f + g$ pour $\lambda \in \mathbf{R}$ et pensez à la résolution des équations de degré 2 en λ.

8 Synthèse sur les calculs de primitive

Exercice 22 (**)
En s'aidant d'une formule de récurrence, calculer (à une constante près)
$$u_n = \int x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{où } n \in \mathbf{N}.$$
(on écrira le résultat sous forme de somme)

[1] On pourra poser $u = \sin(t)$.

Exercice 23 (***) (Intégrales de Wallis)
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$

1. À l'aide de l'intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n+2}.
2. Exprimer I_n en fonction de n en distinguant les cas n pair et n impair.
3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\ \mathrm{d}t$
   À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_n = J_n$ pour tout n.

Exercice 24 (**)
On dispose de $N+1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne numérotée k contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches.
On choisit une urne uniformément au hasard. Sans connaître son numéro, on en tire une boule n fois de suite, indépendamment, avec remise après chaque tirage.
On note U_i l'événement « l'urne tirée est l'urne numéro i », A_i l'événement « les i premières boules tirées sont rouges » et B_i l'événement « la i-ème boule tirée est rouge ».

1. Calculer $\mathbf{P}(U_i)$, $\mathbf{P}(A_n|U_i)$ et $\mathbf{P}(A_n)$.
2. Quelle est la probabilité P_N que le $n+1$-ième tirage donne encore une boule rouge, sachant que, au cours des n premiers tirages, seules des boules rouges ont été tirées ?
3. Démontrer que :
$$\int_0^N x^n\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^N i^n \leqslant \int_0^N (x+1)^n\,\mathrm{d}x.$$
4. Calculer la limite de P_N lorsque n est fixé et $N \to +\infty$.