Probabilités sur un univers fini

Les applications numériques peuvent se faire à la calculatrice.

1 Retour au dénombrement

Exercice 1 (*) (Le chevalier de Méré)
Selon Pascal, le chevalier de Méré « avait très bon esprit mais n'était pas très bon géomètre ». C'était un joueur impénitent toujours à la recherche d'astuces pour avoir un avantage sur ses adversaires. Voici deux de ses règles, les commenter (à l'aide de la calculatrice).

1) Il est avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un 6 en lançant un dé 4 fois de suite.
2) Il est avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un double 6 en lançant deux dés 24 fois de suite.
3) À partir de combien de lancers au minimum est-il intéressant de parier sur l'apparition d'un double 6 ?

Exercice 2 (**) (Yam's)
Julia est férue du jeu de Yam's.
Le jeu consiste à lancer 5 dés simultanément, et un yams est obtenu lorsque les 5 dés ont la même valeur.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir un yams ?
2) À partir de combien de lancers au minimum Julia a-t-elle plus d'une chance sur deux d'avoir obtenu au moins un yams ?
3) Supposons que Julia ait obtenu k dés identiques au premier lancer. Elle les conserve et relance les autres. Quelle est la probabilité qu'elle obtienne alors un yams ?
4) En particulier, si les 5 dés donnent des valeurs différentes au premier lancer. A-t-elle intérêt à les relancer tous ou plutôt à en conserver un si elle souhaîte obtenir un yams ?

Exercice 3 (**) (Poker)
On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants :

1) Obtenir exactement deux as dans ma main.
2) Obtenir une main qui comprend au moins deux as.
3) Obtenir une main qui contient (au moins) une paire d'as sachant que j'avais déjà subtilisé un as du jeu dans ma manche (j'ai donc six cartes).
4) Obtenir une main avec au moins une paire.
5) Obtenir un flush (les 5 cartes de la même couleur).

Exercice 4 (**)
On tire simultanément 8 cartes d'un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants :

1) Obtenir exactement deux cœurs.
2) Obtenir au plus deux cœurs.
3) Obtenir au moins deux cœurs.
4) Obtenir exactement deux cœurs et un valet.
5) Obtenir au moins « un cœur ou un valet ».
6) Obtenir au moins un cœur et au moins un valet.

Exercice 5 (**)
On tire 4 cartes d'un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir « 4 cartes toutes de la même couleur ou une de chaque couleur » si

1) on tire les 4 cartes simultanément,
2) on tire les 4 cartes successivement sans remise,
3) on tire les 4 cartes successivement avec remise.

Exercice 6 (**)
Un jeu de cartes est truqué : on a remplacé dans ce jeu, une carte autre que l'as de pique par un second as de pique.
On tire simultanément 4 cartes.

1) Quelle est la probabilité de déceler la supercherie ?
2) On recommence n fois l'expérience (en remettant à chaque fois les 4 cartes dans le jeu). Quel est le nombre minimum d'expériences à réaliser pour découvrir la supercherie avec une probabilité supérieure à 0,95.

Exercice 7 (**) (Anniversaire)

1) Dans la classe (40 étudiants) quelle est la probabilité qu'un étudiant ait son anniversaire le même jour que l'enseignant ? Donner une valeur approchée.

2) Quelle est la probabilité que deux étudiants aient leur anniversaire le même jour ? Donner une valeur approchée.

2 Espaces probabilisés

Exercice 8 (Pour commencer)
Soit $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$,

1) Déterminer une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω, tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(\{k\})$ soit proportionnel à k.

2) Déterminer une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω, tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(\{1, 2, \cdots, k\})$ soit proportionnel à k^2.

3) Déterminer une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω, tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(\{k\})$ soit proportionnel à k^2.

3 Événements indépendants

Exercice 9 (*)
On lance un dé à six faces parfaitement équilibré. Les événements suivants sont-ils indépendants ?

$$A : \text{« on obtient le tirage 2, 4 ou 6 »}, \quad B : \text{« on obtient le tirage 3 ou 6 »}.$$

Exercice 10 (*)
Soient A_1, A_2, $\cdots$, A_n des événements mutuellement indépendants.
Montrer que si $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1$, alors il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mathbf{P}(A_i) = 1$.

Exercice 11 (**)
Montrer qu'un événement A est indépendant de tout autre événement si et seulement si $\mathbf{P}(A) = 0$ ou 1.

4 Probabilités conditionnelles

Exercice 12 (**)
Soient A et B deux événements avec $\mathbf{P}(A) > 0$. Comparer les probabilités conditionnelles

$$\mathbf{P}_{A\cup B}(A \cap B) \text{ et } \mathbf{P}_A(A \cap B).$$

Exercice 13 (*)
On classe des gérants de portefeuille en deux catégories : les bien informés et les autres. Lorsqu'un gérant bien informé conseille son client sur une valeur boursière, la probabilité que le cours de cette action suive ses prédictions est de 0,8. Si le gérant est mal informé, la probabilité que le cours ne suive pas ses prédictions est 0,6.
Pour un gérant fixé, les événements suivants lesquels les cours suivent ou non les prédictions sont mutuellement indépendants.
On sait par ailleurs que si l'on choisit au hasard un gérant de portefeuille, il y a une chance sur 10 pour que celui ci soit un gérant bien informé.
Un client choisit au hasard un gérant qui lui propose une position sur une valeur.

1) Sachant que le cours de cette valeur suivi les prédictions du gérant, quelle est la probabilité pour que ce gérant soit mal informé ?

2) Le gérant informe le client dix fois sur des valeurs, et ses informations se sont révélées justes les dix fois.
Il propose à présent une position sur une nouvelle valeur. Quelle est la probabilité qu'il ait raison.

Exercice 14 (**) (Le caméléon)
Un caméléon daltonien posé sur du vert prend soit la couleur verte, soit la couleur rouge, avec la même probabilité. Quand il est posé sur du rouge, il prend soit la couleur verte une fois sur cinq, soit la couleur rouge quatre fois sur cinq.
Laurine étale chaque matin sa couverture bicolore sur l'herbe, une fois sur trois côté rouge visible, deux fois sur trois côté vert visible.
Un couple[1] de caméléon daltoniens vient s'ébattre sur sa couverture.

1) Calculer la probabilité qu'ils soient de la même couleur.

2) Les événements « le caméléon mâle est vert » et « le caméléon femelle est vert » sont-ils indépendants ?

3) Sachant qu'ils sont de couleurs différentes, calculer la probabilité que la face apparente de la couverture soit rouge.

Exercice 15 (*) (Bluff ?)
Vous jouez au poker. C'est le dernier tour de mise, il ne reste plus que Jérémie en face de vous. Il y a 540 dans le pot et Jérémie relance encore 200 par dessus. Vous hésitez à le suivre. Vous savez que la probabilité qu'il bluffe est de 25%. Lorsqu'il bluffe, il relance 9 fois sur 10, par contre, lorsqu'il ne bluffe pas, il ne relance que 6 fois sur 10.

1) Quelle est la probabilité qu'il bluffe ?

[1] Pour une couleur de couverture fixée, et malgré l'amour fou qui lie les deux caméléons, leurs deux couleurs respectives sont indépendantes entre elles.

2) (*avec le cours de terminale*) Avez-vous intérêt à le suivre (sachant que vous gagnez uniquement s'il bluffe) ?

5 Chaîne de Markov

Exercice 16 (**)
Un fumeur cherche à arrêter de fumer chaque jour. On note p_n la probabilité qu'il fume le n-ième jour.

- S'il a réussi à ne pas fumer un jour, il ne fume pas le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$.
- S'il fume un jour, il ne fume pas le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

1) Calculer p_{n+1} en fonction de p_n.
2) Calculer p_n en fonction de p_1 et de n.
3) Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

6 Casse-tête

Exercice 17 (*)
Une famille a deux enfants.

1) Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?
2) Quelle est cette probabilité sachant que l'aîné est un garçon ?
3) On sait que l'un des deux enfants est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre le soit aussi ?
4) (*** *) On sait que l'un des deux enfants est un garçon et né un 29 février, quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

Exercice 18 (***) (Le jeu des trois portes)
Dans le jeu « Let's make a deal », trois portes A,B, C sont fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une Ferrari, derrière les autres, une chèvre.

- Le joueur choisit une porte, disons A.
- Le présentateur sait où se trouve la voiture, et l'informe (sans mentir) qu'elle n'est pas derrière la porte B puis il lui offre la possibilité de réviser son choix.

Le joueur a-t-il intérêt à réviser son choix ?
On suppose que le joueur est davantage attiré par la Ferrari que par la chèvre et que le présentateur ne va jamais indiquer au joueur qu'il se trompe.
Indication[2]

7 Exercices CCINP

Exercice 19 (CCINP 105)

1) Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2) On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé?
   (b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 20 (CCINP 107)
On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes:
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche »
et on pose $p_n = \mathbf{P}(B_n)$.

1) Calculer p_1.
2) Prouver que : $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

[2] Une fois que la porte A a été choisie, poser A: « la Ferrari est derrière la porte A » ; de même pour B et C. Poser I : « le présentateur indique qu'elle n'est pas derrière la porte B ».