

LES NOMBRES RÉELS

1 RÉOLUTION D'ÉQUATIONS ET INÉGALITÉS

D'autres exercices sur les inégalités se trouvent dans la partie soutien du site, ne pas hésiter à s'y référer.

Exercice 1 (*)

Résoudre et représenter graphiquement les solutions des inégalités suivantes :

$$1) (x-2)(x-1) < 0.$$

$$2) \frac{x+3}{x-5} < 0.$$

$$3) \frac{x+3}{x-5} < 1.$$

$$4) x < \frac{1}{x}.$$

Exercice 2 (*)

Résoudre les inégalités suivantes :

$$1) -x^3 + 2x^2 \geq 0.$$

$$2) 2x^2 - 4x - 6 \geq 0.$$

$$3) x^3 + 5x^2 + 8x + 6 < 2.$$

$$4) x^3 + x^2 - 5x - 5 \leq 0.$$

Exercice 3 (*)

Résoudre les inégalités suivantes :

$$1) |x-5| < 2.$$

$$2) |x+1| > 3.$$

$$3) \frac{1+x}{1-x} < |x-1|.$$

Exercice 4 (**)

Résoudre les égalités suivantes :

$$1) x|x| = 3x + 2.$$

$$2) |x+2| + |3x-1| = 4.$$

$$3) |x^2 + x - 3| = |x|.$$

$$4) x + |x| = \frac{2}{x}.$$

Exercice 5 (*)

1) Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

2) En déduire que pour tout $x > 0$,

$$0 \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}.$$

Exercice 6 (**)

Résoudre les égalités suivantes :

$$1) \ln((x+2)(x-1)) = \ln 2.$$

$$2) x + \sqrt{2x+1} = 1.$$

$$3) \ln((x+2)(x-1)) = \ln(x^2 - 2).$$

2 RELATIONS BINAIRES

Exercice 7 (*)

Donner la liste de

1) toutes les relations d'équivalence sur $E = \{1, 2, 3\}$.

2) toutes les relations d'ordre sur $E = \{1, 2\}$.

Exercice 8 (**) (lecture du cours)

Répondre en justifiant.

1) Une relation binaire peut-elle être à la fois symétrique et antisymétrique ?

2) Une relation binaire peut-elle n'être ni symétrique, ni antisymétrique ?

3) Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre \preceq .
Peut-il exister une suite d'éléments $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux à deux distincts de E formant une boucle d'inégalités :

$$x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq x_n \preceq x_1 ?$$

4) Soit E un ensemble non vide muni d'une relation \prec antisymétrique et transitive.
Est-ce nécessairement une relation d'ordre stricte ?

Dans ce cas, y-a-t-il unicité de la relation d'ordre « large » qui lui est associée ?

5) On considère une partition d'un ensemble non vide E .

Montrer qu'il existe une relation d'équivalence sur E telle que cette partition correspondent aux classes d'équivalence de cette partition.

6) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une relation d'équivalence sur E soit totale.

Exercice 9 (*)

On note $E = \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ et on munit E de la relation binaire définie par

$$\forall ((a, b), (c, d)) \in E^2, (a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff ad = bc.$$

- 1) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur E .
- 2) Décrire la classe d'équivalence de $(a, b) \in E$.

Exercice 10 (*)

On définit la relation \mathcal{R} sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, A\mathcal{R}B \iff A = B \text{ ou } A = \overline{B}.$$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

Exercice 11 ()**

On définit la relation \mathcal{R} sur \mathbf{R} par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x.$$

- 1) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
- 2) Pour $x \in \mathbf{R}$, déterminer le nombre d'éléments de la classe de x modulo \mathcal{R} .

Exercice 12 ()**

Étudier la relation \mathcal{R} définie sur \mathbf{R} par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, x\mathcal{R}y \iff \exists n \in \mathbf{N}^*, y = x^n.$$

3 MAJORANTS-MINORANTS

Exercice 13 (*)

- 1) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est-elle majorée sur \mathbf{R}_+^* , est-elle minorée sur ce même intervalle ?
- 2) Donner sa borne inférieure en justifiant. Est-ce un minimum ?

Exercice 14 (*)

$$E = \{1 - (-1)^n, n \in \mathbf{N}\}.$$

- 1) L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
- 2) S'il est majoré, donner sa borne supérieure, est-ce un maximum ?
- 3) S'il est minoré, donner sa borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 15 (*)

$$E = \left\{ \frac{2n-1}{n}, n \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

- 1) L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
- 2) S'il est majoré, donner sa borne supérieure, est-ce un maximum ?
- 3) S'il est minoré, donner sa borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 16 (*)

On considère les fonctions a et b définies sur \mathbf{R} par:

$$a(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \geq 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad b(x) = \begin{cases} 1+1/x & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

- 1) Les fonctions sont-elles majorées ? minorées ?
- 2) Si elles sont majorées, donner leur borne supérieure, est-ce un maximum ?
- 3) Si elles sont minorées, donner leur borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 17 ()**

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, 3u_{n+1} + 2u_n + 1 = 0.$$

Déterminer si la suite est majorée, minorée.

Déterminer, en cas d'existence $\sup \{u_n, n \in \mathbf{N}\}$ et $\inf \{u_n, n \in \mathbf{N}\}$.

Exercice 18 (*)**

Soient A et B deux parties non vides minorées de \mathbf{R} .

Montrer que $A \cup B$ admet une borne inférieure et l'exprimer en fonction de $\inf(A)$, $\inf(B)$.

Exercice 19 (*)**

Soient A et B deux parties non vides majorées de \mathbf{R} , non disjointes.

- 1) Montrer que $\sup A \cap B \leq \min(\sup A, \sup B)$.
- 2) A-t-on l'égalité dans le cas général ?
- 3) Qu'en est-il si A et B sont des intervalles ?

Exercice 20 (*)**

Soient f et g deux fonctions $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ bornées.

- 1) Montrer que $|f|$ et $|g|$ sont est majorées sur \mathbf{R} .
- 2) Montrer que $\sup_{x \in \mathbf{R}} (|f(x) + g(x)|) \leq \sup_{x \in \mathbf{R}} (|f(x)|) + \sup_{x \in \mathbf{R}} (|g(x)|)$.
- 3) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que $\sup_{x \in \mathbf{R}} (|\lambda f(x)|) = |\lambda| \sup_{x \in \mathbf{R}} (|f(x)|)$.

4 PARTIE ENTIÈRE**Exercice 21 (**)**

Démontrer que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Exercice 22 ()**

Démontrer que $\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$0 \leq \lfloor nx \rfloor - n \lfloor x \rfloor \leq n - 1.$$

Exercice 23 ()**

Démontrer que $\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \left\lfloor \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 24 (*)

Résoudre l'équation $\left\lfloor \frac{x}{1-3x} \right\rfloor = 2$.

Exercice 25 ()**

Résoudre sur \mathbf{R}

$$\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor.$$

Exercice 26 ()**

Soit a un réel fixé.

1) Montrer que pour tous réels x , $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

2) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\left\lfloor \frac{a + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

3) En déduire, pour tout entier n , une expression simplifiée de $u_n = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{a + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

5 INÉGALITÉS PLUS SOPHISTIQUÉES

Exercice 27 (*)

Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\min(x, y) = \frac{(x + y) - |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \max(x, y) = \frac{(x + y) + |x - y|}{2}.$$

Exercice 28 ()**

- 1) Résoudre dans \mathbf{R} , l'inéquation suivante : $x^2 - x - 1 \geq 0$.
- 2) Résoudre dans \mathbf{R} , la chaîne d'inéquations suivantes :

$$1 + x - x^2 \leq x^2 - 3x + 1 \leq x^2 - x - 1.$$

- 3) Résoudre dans \mathbf{R} , l'inéquation :

$$|x^2 - 3x + 1| \leq x^2 - x - 1.$$

Exercice 29 ()**

Soit $n \geq 1$.

On considère $(a_i)_{i \in [1, n]} \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, et on se propose de comparer leurs moyennes harmonique H , géométrique G et arithmétique A .

Elles sont définies par

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i}, \quad G = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

- 1) Montrer que pour $n \in \{1, 2\}$,
$$G \leq A.$$
- 2) En déduire que pour tout n puissance de 2, $G \leq A$.
- 3) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $n \leq 2^p$.
On complète la famille (a_1, \dots, a_n) par la valeur A autant de fois que nécessaire pour obtenir un 2^p -uplet.
Montrer que cela permet de prouver que $G \leq A$ au rang n .
- 4) Prouver que $H \leq G$.

Exercice 30 ()**

On définit f sur \mathbf{R}_+ par

$$f : x \mapsto \sup_{n \in \mathbf{N}} \frac{x^n}{n!}.$$

Montrer que f est bien définie sur \mathbf{R}_+ et donner son expression sans utiliser les bornes supérieures (ou inférieures).

Exercice 31 ()**

- 1) (*) Montrer que $\forall x \in [0, 1], 0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.
Retenir cette inégalité et la méthode.

- 2) En déduire que $\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3$,

$$\min(a(1-b), b(1-c), c(1-a)) \leq \frac{1}{4}.$$

Exercice 32 ()**

- 1) Soient $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, montrer que $(x+y)^2 \geq 4xy$.
- 2) En déduire que

$$\forall (a, b, c) \in (\mathbf{R}_+)^3, (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

- 3) En déduire que

$$\forall (a, b, c) \in (\mathbf{R}_+^*)^3, (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

Exercice 33 (*)**

Montrer que pour tout $n \geq 3$,

$$\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!}.$$

6 DENSITÉ

Exercice 34 (*)

Montrer que $E = \{r^3, r \in \mathbf{Q}\}$ est dense dans \mathbf{R} .

Exercice 35 (*)

Soit $A \subset B$ deux parties non vides de \mathbf{R} ,

- 1) On suppose A dense dans \mathbf{R} , montrer alors que B est dense dans \mathbf{R} .
Montrer également que A est alors dense dans B .
- 2) On suppose à présent que A est dense dans B et B dense dans \mathbf{R} . Montrer alors que A est dense dans \mathbf{R} .

7 APPROFONDISSEMENT**Exercice 36 (***) (Min-max ou max-min ?)**

- 1) Soit $(n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on définit $a_{i,j} \in \mathbf{R}$.
Démontrer que

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left(\max_{1 \leq j \leq p} a_{i,j} \right) \geq \max_{1 \leq j \leq p} \left(\min_{1 \leq i \leq n} a_{i,j} \right).$$

- 2) (*Lewis Carroll*) Soient 200 hussard rangés en 10 lignes et 20 colonnes.
Dans chaque ligne, on prend le plus grand puis on retient le plus petit de tous ceux retenus : X
Dans chaque colonne, on prend le plus petit, puis on retient le plus grand de ceux-ci : Y .
Qui est le plus grand ? X ou Y ?

Exercice 37 (*)**

On note E l'ensemble des parties non vides majorées de \mathbf{R} .

$$f : \begin{cases} (E, \subset) & \rightarrow (\mathbf{R}, \leq) \\ A & \mapsto \sup A. \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est une fonction croissante pour les relations d'ordre choisies.
2) Montrer qu'elle n'est pas strictement croissante.