Les nombres réels

1 Résolution d'équations et inéquations

D'autres exercices sur les inégalités se trouvent dans la partie soutien du site, ne pas hésiter à s'y référer.

Exercice 1 (*)
Résoudre et représenter graphiquement les solutions des inégalités suivantes :

1) $(x-2)(x-1) < 0$.
2) $\dfrac{x+3}{x-5} < 0$.
3) $\dfrac{x+3}{x-5} < 1$.
4) $x < \dfrac{1}{x}$.

Exercice 2 (*)
Résoudre les inégalités suivantes :

1) $-x^3 + 2x^2 \geqslant 0$.
2) $2x^2 - 4x - 6 \geqslant 0$.
3) $x^3 + 5x^2 + 8x + 6 < 2$.
4) $x^3 + x^2 - 5x - 5 \leqslant 0$.

Exercice 3 (*)
Résoudre les inégalités suivantes :

1) $|x-5| < 2$.
2) $|x+1| > 3$.
3) $\dfrac{1+x}{1-x} < |x-1|$.

Exercice 4 (**)
Résoudre les égalités suivantes :

1) $x|x| = 3x + 2$.
2) $|x+2| + |3x-1| = 4$.
3) $|x^2 + x - 3| = |x|$.
4) $x + |x| = \dfrac{2}{x}$.

Exercice 5 (*)

1) Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
2) En déduire que pour tout $x > 0$,

$$0 \leqslant \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}.$$

Exercice 6 (**)
Résoudre les égalités suivantes :

1) $\ln((x+2)(x-1)) = \ln 2$.
2) $x + \sqrt{2x+1} = 1$.

2 Relations binaires

Exercice 7 (*)
Donner la liste de

1) toutes les relations d'équivalence sur $E = \{1, 2, 3\}$.
2) toutes les relations d'ordre sur $E = \{1, 2\}$.

Exercice 8 (**) (lecture du cours)
Répondre en justifiant.

1) Une relation binaire peut-elle être à la fois symétrique et antisymétrique ?
2) Une relation binaire peut-elle n'être ni symétrique, ni antisymétrique ?
3) Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$.
Peut-il exister une suite d'éléments $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux à deux distincts de E formant une boucle d'inégalités :
$$x_1 \preccurlyeq x_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq x_n \preccurlyeq x_1\,?$$
4) Soit E un ensemble non vide muni d'une relation $\prec$ antisymétrique et transitive.
Est-ce nécessairement une relation d'ordre stricte ?
Dans ce cas, y-a-t-il unicité de la relation d'ordre « large » qui lui est associée ?
5) On considère une partition d'un ensemble non vide E.
Montrer qu'il existe une relation d'équivalence sur E telle que cette partition correspondent aux classes d'équivalence de cette partition.
6) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une relation d'équivalence sur E soit totale.

Exercice 9 (*)
On note $E = \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ et on munit E de la relation binaire définie par
$$\forall((a, b), (c, d)) \in E^2,\ (a, b)\mathscr{R}(c, d) \iff ad = bc.$$

1) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
2) Décrire la classe d'équivalence de $(a, b) \in E$.

Exercice 10 (*)
On définit la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall (A,\, B) \in (\mathcal{P}(E))^2\,,\; A\mathscr{R}B \iff A = B \text{ ou } A = \overline{B}.$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 11 (**)
On définit la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall (x,\, y) \in \mathbf{R}^2,\, x\mathscr{R}y \iff x\,\mathrm{e}^y = y\,\mathrm{e}^x.$$

1) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Pour $x \in \mathbf{R}$, déterminer le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathscr{R}$.

Exercice 12 (**)
Étudier la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall (x,\, y) \in \mathbf{R}^2,\, x\mathscr{R}y \iff \exists n \in \mathbf{N}^*,\, y = x^n.$$

3 Majorants-minorants

Exercice 13 (*)

1) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est-elle majorée sur $\mathbf{R}_+^*$, est-elle minorée sur ce même intervalle ?

2) Donner sa borne inférieure en justifiant. Est-ce un minimum ?

Exercice 14 (*)

$$E = \{1 - (-1)^n,\; n \in \mathbf{N}\}\,.$$

1) L'ensemble est-il majoré ? minoré ?

2) S'il est majoré, donner sa borne supérieure, est-ce un maximum ?

3) S'il est minoré, donner sa borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 15 (*)

$$E = \left\{ \frac{2n-1}{n},\; n \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

1) L'ensemble est-il majoré ? minoré ?

2) S'il est majoré, donner sa borne supérieure, est-ce un maximum ?

3) S'il est minoré, donner sa borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 16 (*)
On considère les fonctions a et b définies sur $\mathbf{R}$ par:

$$a(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2-x & \text{si } x \geqslant 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad b(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 + 1/x & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{(-x)} & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right. .$$

1) Les fonctions sont-elles majorées ? minorées ?

2) Si elles sont majorées, donner leur borne supérieure, est-ce un maximum ?

3) Si elles sont minorées, donner leur borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 17 (**)
On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\; 3u_{n+1} + 2u_n + 1 = 0.$$

Déterminer si la suite est majorée, minorée.
Déterminer, en cas d'existence $\sup\{u_n,\; n \in \mathbf{N}\}$ et $\inf\{u_n,\; n \in \mathbf{N}\}$.

Exercice 18 (***)
Soient A et B deux parties non vides minorées de $\mathbf{R}$.
Montrer que $A \cup B$ admet une borne inférieure et l'exprimer en fonction de $\inf(A)$, $\inf(B)$.

Exercice 19 (***)
Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbf{R}$, non disjointes.

1) Montrer que $\sup A \cap B \leqslant \min(\sup A, \sup B)$.

2) A-t-on l'égalité dans le cas général ?

3) Qu'en est-il si A et B sont des intervalles ?

Exercice 20 (***)
Soient f et g deux fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bornées.

1) Montrer que $|f|$ et $|g|$ sont est majorées sur $\mathbf{R}$.

2) Montrer que $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} (|f(x) + g(x)|) \leqslant \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} (|f(x)|) + \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} (|g(x)|)$.

3) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} (|\lambda f(x)|) = |\lambda| \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} (|f(x)|)$.

4 Partie entière

Exercice 21 (**)
Démontrer que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Exercice 22 (**) (méthode)
Démontrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$0 \leqslant \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leqslant n-1.$$

Exercice 23 (**)
Démontrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\left\lfloor \dfrac{1}{n}\lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 24 (*)
Résoudre l'équation $\left\lfloor \frac{x}{1-3x} \right\rfloor = 2$.

Exercice 25 (**)
Résoudre sur $\mathbf{R}$

$$\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor .$$

Exercice 26 (**)
Soit a un réel fixé.

1) Montrer que pour tous réels x, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

2) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\left\lfloor \dfrac{a+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{a}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{a}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

3) En déduire, pour tout entier n, une expression simplifiée de $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \dfrac{a+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

5 Inégalités plus sophistiquées

Exercice 27 (*)
Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\min(x,y) = \frac{(x+y)-|x-y|}{2} \qquad \text{et} \qquad \max(x,y) = \frac{(x+y)+|x-y|}{2}.$$

Exercice 28 (**)

1) Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'inéquation suivante : $x^2 - x - 1 \geqslant 0$.

2) Résoudre dans $\mathbf{R}$, la chaîne d'inéquations suivantes :

$$1 + x - x^2 \leqslant x^2 - 3x + 1 \leqslant x^2 - x - 1.$$

3) Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'inéquation :

$$|x^2 - 3x + 1| \leqslant x^2 - x - 1.$$

Exercice 29 (**)
Soit $n \geqslant 1$.
On considère $(a_i)_{i \in [\![1,\, n]\!]} \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, et on se propose de comparer leurs moyennes harmonique H, géométrique G et arithmétique A.
Elles sont définies par

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}, \quad G = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

1) Montrer que pour $n \in \{1,\, 2\}$,
$$G \leqslant A.$$

2) En déduire que pour tout n puissance de 2, $G \leqslant A$.

3) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $n \leqslant 2^p$.
On complète la famille $(a_1, \cdots, a_n)$ par la valeur A autant de fois que nécessaire pour obtenir un 2^p-uplet.
Montrer que cela permet de prouver que $G \leqslant A$ au rang n.

4) Prouver que $H \leqslant G$.

Exercice 30 (**)
On définit f sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f : x \mapsto \sup_{n\in\mathbf{N}} \frac{x^n}{n!}.$$

Montrer que f est bien définie sur $\mathbf{R}_+$ et donner son expression sans utiliser les bornes supérieures (ou inférieures).

Exercice 31 (**)

1) (*) Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.
Retenir cette inégalité et la méthode.

2) En déduire que $\forall (a,b,c) \in [0,1]^3$,

$$\min\big(a(1-b), b(1-c), c(1-a)\big) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Exercice 32 (**)

1) Soient $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, montrer que $(x+y)^2 \geqslant 4xy$.

2) En déduire que

$$\forall (a,b,c) \in (\mathbf{R}_+)^3,\ (a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

3) En déduire que

$$\forall (a,b,c) \in (\mathbf{R}_+^*)^3,\ (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9$$

Exercice 33 (***)
Montrer que pour tout $n \geqslant 3$,

$$\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!}\,.$$

6 Densité

Exercice 34 (*)
Montrer que $E = \left\{r^3,\ r \in \mathbf{Q}\right\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

Exercice 35 (*)
Soit $A \subset B$ deux parties non vides de $\mathbf{R}$,

1) On suppose A dense dans $\mathbf{R}$, montrer alors que B est dense dans $\mathbf{R}$.
Montrer également que A est alors dense dans B.

2) On suppose à présent que A est dense dans B et B dense dans $\mathbf{R}$. Montrer alors que A est dense dans $\mathbf{R}$.

7 Approfondissement

Exercice 36 (***) (Min-max ou max-min ?)

1) Soit $(n,p) \in (\mathbf{N}^*)^2$. $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,p]\!]$, on définit $a_{i,j} \in \mathbf{R}$.
Démontrer que

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant p} a_{i,j}\right) \geqslant \max_{1\leqslant j\leqslant p}\left(\min_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,j}\right).$$

2) (*Lewis Carroll*) Soient 200 hussard rangés en 10 lignes et 20 colonnes.
Dans chaque ligne, on prend le plus grand puis on retient le plus petit de tous ceux retenus : X
Dans chaque colonne, on prend le plus petit, puis on retient le plus grand ce ceux-ci : Y.
Qui est le plus grand ? X ou Y ?

Exercice 37 (***)
On note E l'ensemble des parties non vides majorées de $\mathbf{R}$.

$$f : \left\{\begin{array}{ccc}(E,\subset) & \to & (\mathbf{R},\leqslant)\\ A & \mapsto & \sup A.\end{array}\right.$$

1) Montrer que f est une fonction croissante pour les relations d'ordre choisies.

2) Montrer qu'elle n'est pas strictement croissante.