

SOMMES ET PRODUITS

On admettra les deux résultats suivants :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Ou on les prouvera par récurrence.

1 SOMMES

Exercice 1 (*) (Pour commencer)

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbf{C}$, calculer les sommes :

1. $\sum_{k=1}^n 3^n$	5. $\sum_{k=-n}^0 k$
2. $\sum_{k=n}^{2n} a$	6. $\sum_{k=-n}^n (2k+1)$
3. $\sum_{k=0}^n 3(a^k + 1)$	7. $\sum_{k=-5}^{-10} a$
4. $\sum_{k=0}^n 3a^{k+1}$	8. $\sum_{k=1}^n k(k+2)$

Exercice 2 (*)

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbf{C}$, calculer les sommes :

1. $\sum_{k=0}^{10} 5$	5. $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2$
2. $\sum_{k=-2}^7 (-1)$	6. $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k$
3. $\sum_{k=0}^n e^{ak}$	7. $\sum_{k=-n}^{2n} n^k$
4. $\sum_{k=1}^n a^{2k+1}$	

Exercice 3 () (changement d'indice)**

Remplacer le ? par sa valeur dans les égalités suivantes :

1. $\sum_{k=1}^n (k+1)a_k = \sum_{j=?}^? ja_?$
2. $\sum_{k=2}^{n+3} a_{k-1} = \sum_{j=?}^? a_j$
3. $\sum_{k=1}^{n+1} a_{n-k} = \sum_{j=?}^? a_j$
4. $\sum_{k=1}^n a_{2k} + \sum_{k=1}^n a_{2k+1} = \sum_{k=?}^? a_k$

Exercice 4 ()**

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer :

1. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$
2. $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right)$

Exercice 5 ()**

Soit $a \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n ka^k$

1. Calculer S_n lorsque $a = 1$.
2. Lorsque $a \neq 1$, calculer $aS_n - S_n$, en déduire la valeur de S_n .

Exercice 6 ()**

Soit p un nombre entier, $p \geq 2$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{p^k} \leq \frac{p}{1-p}$$

2 SOMMES DOUBLES

Exercice 7 (*)

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer les sommes :

1. $\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n i$	4. $\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n (2i+j)$
2. $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n 2^{i+j}$	5. $\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n (2^i + j)$
3. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{i}{j}$	6. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$

Exercice 8 ()**

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer les sommes :

1. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j)$
2. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j|$

Exercice 9 (*)**

1. Montrer que $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un famille de \mathbf{R}_+^* .
Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \geq n^2.$$

Exercice 10 (*)**

Pour $n \geq 1$, calculer

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{i+j}.$$

3 PRODUITS

Exercice 11 (*)

Calculer les produits suivants

$$1. \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+3} \quad 2. \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad 3. \prod_{k=1}^n a^k$$

$$4. \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} (-1)^k (n-k)$$

Indication¹

Exercice 12 (*)

Simplifier en utilisant la notation factorielle

$$1. 6 \times 5 \times 4 \times 3 \quad 3. n(n-1)(2n+2)$$

$$2. \frac{10 \times 9 \times 8}{7 \times 6 \times 5 \times 4}$$

Exercice 13 (**)

Simplifier en utilisant la notation factorielle

$$1. (2n) \times (2n-2) \times (2n-4) \times \dots \times 2.$$

$$2. (2n-1) \times (2n-3) \times (2n-5) \times \dots \times 1.$$

Exercice 14 (***)

On définit la suite (u_n) par $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = -2(n+1)u_n.$$

Exprimer simplement u_n en fonction de n et sans utiliser le signe \prod .

Indication²

4 COEFFICIENTS BINOMIAUX

Exercice 15 (*)

Calculer les expressions suivantes

$$1. \binom{10}{9} \quad 2. \binom{8}{2} \quad 3. \binom{21}{21} \quad 4. \binom{50}{48}$$

Exercice 16 (*)

Pour $(x, y) \in \mathbf{C}^2$, développer *rapidement* à l'aide du triangle de Pascal

$$1. (1+x)^5 \quad 2. (1-x)^6 \quad 3. (x-y)^4$$

Exercice 17 (*)

Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{3^k} \quad 2. \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}}$$

Exercice 18 (**)

Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$$

$$2. \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$$

$$3. \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+k} k^2 \binom{n}{k}$$

Exercice 19 (**)

Calculer la somme

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \binom{j}{i}.$$

Exercice 20 (**)

Calculer la double somme

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{n-i}{n-j} \binom{n}{i}.$$

Exercice 21 (***) (Classique)

Pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$, montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Indication³

Exercice 22 (***)

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}$$

En utilisant le triangle de Pascal, exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et u_{n+1} .

En déduire une expression simple de u_n en fonction de n .

Exercice 23 (***)

Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer les sommes :

$$1. S_1 = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}.$$

$$2. T_1 = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k}$$

$$\text{et } T_2 = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}.$$

1. Faire un changement d'indice dans la deuxième partie du produit.

2. Distinguer les cas où n est pair et où n est impair.

3. On pourra utiliser une récurrence.