

Exercice 9 ()**

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer les sommes :

$$1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j).$$

$$2) \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j|.$$

Exercice 10 (*)**

Pour $n \geq 1$, calculer

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{i+j}.$$

3 PRODUITS**Exercice 11 (*)**

Pour $a \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, calculer les produits suivants :

$$1) \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+3}.$$

$$3) \prod_{k=1}^n a^k.$$

$$2) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

$$4) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} (-1)^k (n - k).$$

Exercice 12 (*)

Simplifier en utilisant la notation factorielle :

$$1) 6 \times 5 \times 4 \times 3.$$

$$2) \frac{10 \times 9 \times 8}{7 \times 6 \times 5 \times 4}.$$

$$3) n(n-1)(2n+2).$$

Exercice 13 ()**

Simplifier en utilisant la notation factorielle

$$1) (2n) \times (2n-2) \times (2n-4) \times \cdots \times 2.$$

$$2) (2n-1) \times (2n-3) \times (2n-5) \times \cdots \times 1.$$

Exercice 14 (*)**

On définit la suite (u_n) par $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = -2(n+1)u_n.$$

Exprimer simplement u_n en fonction de n et sans utiliser le signe $\prod$.

4 COEFFICIENTS BINOMIAUX**Exercice 15 (*)**

Calculer les expressions suivantes :

$$1) \binom{10}{9}$$

$$2) \binom{8}{2}$$

$$3) \binom{21}{21}$$

$$4) \binom{50}{48}$$

Exercice 16 (*)

Pour $(x, y) \in \mathbf{C}^2$, développer *rapidement* à l'aide du triangle de Pascal.

$$1) (1+x)^5.$$

$$2) (1-x)^6.$$

$$3) (x-y)^4.$$

Exercice 17 (*)

Calculer les sommes suivantes :

$$1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{3^k}.$$

$$5) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{3^{k-1}}{2^{2k}}.$$

$$2) \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k+1}.$$

$$6) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \frac{2^n (-1)^{k(k+1)}}{3^{2k}}.$$

$$3) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 3^{k-1}.$$

$$7) \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}}.$$

$$4) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} 3^{2k-1}.$$

Exercice 18 (*)

Calculer les sommes suivantes :

$$1) \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}. \quad 2) \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}. \quad 3) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+k} \binom{n}{k}.$$

Exercice 19 ()**

Calculer :

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{1+k} \binom{n}{k}.$$

Exercice 20 (*)

Calculer la double somme :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{n-i}{n-j} \binom{n}{i}.$$

Exercice 21 () (Formule de la gouttière)**

Pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 22 (*)**

Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer les sommes :

$$S_1 = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}.$$

Exercice 23 (*)**

Soit $n \in \mathbf{N}$, calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}.$$

5 INÉGALITÉS**Exercice 24 (*)**

Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, n! \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n.$$

Exercice 25 (*)**

1) Montrer que $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$.

2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \geq n^2.$$

3) Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 26 (*)**

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$.

On pose

$$S_n = \prod_{k=1}^n x_k \quad \text{et} \quad T_n = \prod_{k=1}^n (1 - x_k).$$

Montrer que $S_n \leq 2^{-n}$ ou $T_n \leq 2^{-n}$.