Applications

1 Pour commencer

Exercice 1 (*)
Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes.
Lorsque les applications sont bijectives, déterminer leur réciproque.

1) $f_1 : \begin{cases} \mathbf{Z} & \to \mathbf{Z} \\ n & \mapsto -n. \end{cases}$

2) $f_2 : \begin{cases} \mathbf{R} & \to [0,1] \\ x & \mapsto |\sin x|. \end{cases}$

3) $f_3 : \begin{cases} \mathbf{N} & \to \mathbf{N} \\ n & \mapsto 2n. \end{cases}$

4) $f_4 : \begin{cases} \mathbf{N} & \to \{-1,1\} \\ n & \mapsto (-1)^n. \end{cases}$

5) $f_5 : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x, x+y, x-y). \end{cases}$

6) $f_6 : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (2x+3y, x+2y). \end{cases}$

7) $f_7 : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{C} \\ (x,y) & \mapsto x+iy. \end{cases}$

8) $f_8 : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{C} \\ (x,y) & \mapsto x\,\mathrm{e}^{iy}. \end{cases}$

9) $f_9 : \begin{cases} \mathbf{C} & \to \mathbf{C} \\ z & \mapsto e^z. \end{cases}$

2 Lecture graphique

Exercice 2 (*)
Déterminer (par lecture graphique)
$\sin\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\right)$, et $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\right)$.

Exercice 3 (*)
Déterminer (par lecture graphique)

1) $\exp^{-1}([0,1])$,
2) $\exp^{-1}(]0,1])$,
3) $\exp^{-1}(]1,+\infty[)$,
4) $\exp\left(\exp^{-1}([-1,1[)\right)$.

Exercice 4 (*)
Représenter graphiquement les fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

$$a \,:\, x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 2-x & \text{si } x \geqslant 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad b \,:\, x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 1+1/x & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{(-x)} & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right. .$$

Répondre aux questions suivantes en lisant sur les graphes des fonctions concernées :

1) Donner $a\,(]-\infty,0])$, $a\,([0,+\infty[)$, $a^{-1}([0,9])$ et $a^{-1}(]-\infty,0])$.

2) Donner $b\,(]0,2])$, $b\,([1,+\infty[)$, $b^{-1}([1/2,+\infty[)$.

3) $a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est-elle surjective ? injective ?
Déterminer deux intervalles I et J de $\mathbf{R}$ tels que $a : I \to J$ soit bijective.

4) $b : \mathbf{R} \to [0,+\infty[$ est-elle surjective ? injective ?
Déterminer deux intervalles $I \subset \mathbf{R}$ et $J \subset [0,+\infty[$ tels que $b : I \to J$ soit bijective.

D'autres exercices concrets seront donnés avec les fonctions usuelles.

3 Exercices abstraits

Exercice 5 (*)
Soient E et F deux ensembles non vides et f une injection de E dans F.
Montrer que f induit une bijection de E dans $f(E)$.

Exercice 6 (**) (à connaître)
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1) Si $g \circ f$ est injective,
   (a) montrer que f est injective,
   (b) montrer à l'aide d'un contre-exemple que g n'est pas nécessairement injective.
   (c) on suppose de plus f surjective.
   A-t-on nécessairement g injective ?

2) Si $g \circ f$ est surjective,
   (a) montrer que g est surjective,
   (b) montrer à l'aide d'un contre-exemple que f n'est pas nécessairement surjective.

Exercice 7 (*)
Soit $f\ : E \to E$. On suppose que $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}$.
Montrer que f est bijective.

Exercice 8 (*)
Soit $f\ : E \to E$. On suppose que $f \circ f \circ f$ bijective.
Montrer que f est bijective.

Exercice 9 (**)
Soit E un ensemble et $p\ : E \to E$ une application telle que $p \circ p = p$.
Montrer les équivalences suivantes

$$p \text{ injective} \iff p \text{ surjective} \iff p = \mathrm{Id}_E.$$

Exercice 10 (**)
Soit $f : E \to F$, montrer que

1) $A \subset f^{-1}(f(A))$ pour toute partie A de E.
2) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ pour toute partie B de F.
3) f injective $\Rightarrow A = f^{-1}(f(A))$ pour toute partie A de E.
4) f surjective $\Rightarrow B = f(f^{-1}(B))$ pour toute partie B de F.

Exercice 11 (***)
Soient E et F deux ensembles non vides. Montrer l'équivalence entre les deux assertions :

1) Il existe une injection de E dans F.
2) Il existe une surjection de F sur E.

4 Applications et ensembles

Exercice 12 (***)
Soit E et F deux ensembles, et $A \subsetneq E$.
On suppose que A est strictement inclus dans E et non vide, et que F admet au moins deux éléments.
On définit l'application f par

$$f\ :\left\{\begin{array}{ccc} F^E & \to & \mathcal{P}(F) \\ \varphi & \mapsto & \varphi(A). \end{array}\right.$$

Montrer que cette application n'est pas injective.

Exercice 13 (***)
Soit E et F deux ensembles, et $\varphi \in F^E$. On suppose $E \neq \emptyset$.
On définit l'application f par

$$f\ :\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & \varphi(A). \end{array}\right.$$

À quelle condition nécessaire et suffisante sur φ, f est-elle injective ?

Exercice 14 (***)
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
On définit l'application f par

$$f\ :\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A,\, X \cap B)\,. \end{array}\right.$$

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.
2) Même question pour que f soit surjective.
3) Conclure pour la bijectivité.