

ENSEMBLES

1 ENSEMBLES EXPLICITES

Exercice 1 (*)

Déterminer $E = \{x > 0, \forall y > 0, x < y\}$.

Exercice 2 (*)

Lister les ensembles

- 1) $\{x^2, x \in \{-1, 0, 1\}\}$.
- 2) $\{(x, y) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2\}$.
- 3) $\{(x, y) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \times \llbracket -1, 1 \rrbracket\}$.
- 4) $\{(x, y) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \times \{-1, 1\}\}$.
- 5) $\llbracket 1, 3 \rrbracket^2$.
- 6) $\{-1, 0\}^3$.

Exercice 3 (*)

Déterminer les ensembles suivants :

- 1) $\{x \in \mathbf{R}, x = \sqrt{x^2}\}$.
- 2) $\{x \in \mathbf{R}, \sqrt{x} < 0\}$.
- 3) $\{x \in \mathbf{R}, (x+1)^2 < x\}$.
- 4) $\{x \in \mathbf{R}, e^{x+1} = e^x + 1\}$.
- 5) $\{x \in \mathbf{R}, x^2 < 2^2\}$.
- 6) $\{x \in \mathbf{R}, -x^2 < -2\}$.

Exercice 4 ()**

Représenter graphiquement $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y \geq x \Rightarrow y^2 \geq x^2\}$.

Exercice 5 (*)

On définit les ensembles

$$K = [2, 5] \times [-1, 4] \quad \text{et} \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y \leq x\}.$$

- 1) Représenter dans le plan
 - (a) le domaine correspondant aux points $M(x, y)$ pour $(x, y) \in K$.
 - (b) le domaine correspondant aux points $M(x, y)$ pour $(x, y) \in D$.
- 2) L'implication suivante est-elle vraie ?

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (x, y) \in K \Rightarrow (x+1, y-1) \in D.$$

- 3) La réciproque est-elle vraie ?
- 4) Montrer que $K \cap D \neq \emptyset$.

Exercice 6 ()**

Pour tout $m \in \mathbf{R}$, on définit la droite \mathcal{D}_m par l'équation

$$\mathcal{D}_m : 12mx - 9y = 3m + 6.$$

Montrer que $\bigcap_{m \in \mathbf{R}} \mathcal{D}_m$ est un singleton.

Exercice 7 ()**

- 1) Pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0; 1\}$, on considère l'intervalle de \mathbf{R} , $I_n = \left[\frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}\right]$.
Déterminer une expression plus simple de l'ensemble $J = \bigcup_{n \in \mathbf{N} \setminus \{0; 1\}} I_n$.
- 2) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on considère l'intervalle de \mathbf{R} , $\tilde{I}_n = \left]1 - \frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}\right[$.
Déterminer une expression plus simple de l'ensemble $K = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \tilde{I}_n$.

2 EXERCICES ABSTRAITS

Exercice 8 (*)

- 1) Donner un exemple d'une intersection d'ensembles non vides, qui est vide.
- 2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'union de deux ensembles soit vide.

Exercice 9 (*)

Décrire en extension les ensembles $\mathcal{P}(\{x\})$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x\}))$.

Exercice 10 ()**

- 1) Soient deux ensembles A et B , écrire $A \setminus B$ à partir des opérations ensemblistes usuelles : $\cap, \cup, \bar{}$.
- 2) Prouver que $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$.

Exercice 11 ()**

Soit un ensemble E , on définit une relation de division sur les parties de E par $A \text{ div } B = A \cup \overline{B}$.

Calculer :

- 1) $A \text{ div } (B \cap A)$.
- 2) $A \text{ div } (B \cup A)$.
- 3) $A \cup (B \text{ div } A)$.
- 4) $A \cap (B \text{ div } A)$.

Exercice 12 ()**

Soient A et B deux parties de E , on définit la différence symétrique de A et B par

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}),$$

en notant $\bar{B} = \complement_E B$ et $\bar{A} = \complement_E A$.

- 1) Expliquer ce que représente la différence symétrique.
- 2) Donner $E \Delta \emptyset$, $A \Delta E$, $E \Delta E$.
- 3) Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Exercice 13 (*)**

A et B sont deux parties non vides de E .

Montrer que

$$\left(\forall X \subset E, \forall Y \subset E, \left\{ \begin{array}{l} A \cap X = A \cap Y \\ B \cap X = B \cap Y \end{array} \right. \Rightarrow X = Y \right) \iff A \cup B = E.$$