Matrices

1 Produit matriciel

Exercice 1 (*)
Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer (s'ils ont un sens) les produits

$$AB, BA, AC, CA, BC, CB, B^2.$$

Exercice 2 (*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Trouver toutes les matrices colonne u telles que

$$Au = 3u.$$

Exercice 3 (*)
Montrer que si la matrice A possède une ligne nulle, alors AB possède une ligne nulle.

2 Trace

Exercice 4 (**)
Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$ tel que $AB - BA = A$. Calculer $\operatorname{tr}\left(A^{2020}\right)$.

Exercice 5 (**)
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que

$$(\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}), \operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)) \Rightarrow A = B.$$

3 Matrices qui commutent

Exercice 6 (**)
Pour A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on note

$$\operatorname{Com}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}),\ MA = AM\}.$$

Com(A) est le *commutant de A*.

1) Montrer que $\operatorname{Com}(A) \neq \emptyset$.
2) Montrer que si $M, N \in \operatorname{Com}(A)$, alors $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \quad \lambda M + \mu N \in \operatorname{Com}(A)$.
3) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, déterminer $\operatorname{Com}(A)$.

Exercice 7 (*)
Soit $(a, b) \in (\mathbf{R}^*)^2$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
Trouver toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 8 (**) (méthode)
Résoudre l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Indication[1]

Exercice 9 (**)
Résoudre l'équation

$$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

Exercice 10 (***)
Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Même question avec les matrices triangulaires supérieures ; même question avec les matrices diagonales.

Exercice 11 (***)
Trouver toutes les matrices A qui commutent avec les matrices symétriques.

[1] On pourra remarquer que A et X commutent.

4 Puissances

Exercice 12 (**)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 13 (**)
Calculer A^k pour $k \in \mathbf{N}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 (**)
Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier.
On pose $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a \neq b$ et $a \neq (1-n)b$.
On définit la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ par

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & b & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}.$$

1) Pour $p \in \mathbf{N}$, calculer A^p.

2) (a) Calculer

$$A^2 - \big(2a + (n-2)b\big)A + (a-b)\big(a + (n-1)b\big)I_n.$$

   (b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 15 (***)
Soit A une matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $A^n = 0$.

5 Matrices inversibles

Exercice 16 (*)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3.

2) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 17 (*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Exprimer $A^3 - A$.

2) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 18 (*)
Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$.

1) Trouver une relation linéaire entre A^2, A et I_2.

2) En déduire une condition suffisante pour que A soit inversible ; donner alors l'expression de A^{-1}.

Exercice 19 (**)
Soit $n \geqslant 2$, montrer que la matrice de taille n

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

6 Pivot de Gauss

Exercice 20 (*)
Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ comme produit de matrices de transvections, dilatations, permutations.

Exercice 21 (*)
À l'aide d'opérations sur les lignes, donner la forme échelonnée réduite des matrices suivantes, en déduire leur rang.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22 (*)
Calculer l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 23 (**)
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ quatre nombres complexes. On considère le système linéaire

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + 3y + 4z + 7t = \lambda_1 \\ x + y + z + t = \lambda_2 \\ x + 3y + 3z + 2t = \lambda_3 \\ x + 3y + 4z + 5t = \lambda_4 \end{cases}.$$

Résoudre le système et en déduire l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24 (**)
Justifier que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (-1) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$

est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 25 (***)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, montrer que

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \iff (\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}),\ AB = 0 \Rightarrow B = 0).$$

7 Synthèse

Exercice 26 (*)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3.

2) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

3) **(méthode)**
Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe $(\alpha_p, \beta_p) \in \mathbf{R}^2$ tel que $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_3$.
Déterminer une relation de récurrence qui lie les suites $(\alpha_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et $(\beta_p)_{p\in\mathbf{N}}$ ainsi obtenues.

4) Déterminer α_p et β_p en fonction de $p \in \mathbf{N}$.
En déduire l'expression de A^p.

On pourra faire de même pour trouver A^p pour $p \leqslant -1$.

Exercice 27 (méthode)**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

2) Calculer $D = P^{-1}AP$ et vérifier que la matrice est diagonale.

3) Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1},
En déduire A^n en fonction de P, P^{-1} et des puissances de D.

4) En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 28 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 et A^3.

2) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

3) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 29 (**)

Soient A, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices symétriques.

1) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que le produit AB soit encore symétrique.

2) Les puissances successives de A sont-elles symétriques ?

3) Si A est inversible, A^{-1} est-elle symétrique ?

Exercice 30 (***)

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ que l'on suppose nilpotente.
Montrer que $(I_n - A)$ est inversible et exprimer son inverse en fonction des puissances de A.

Exercice 31 (**)

Idem à l'exercice 30 mais vu autrement.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

1) Montrer que s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^p = 0$, alors A n'est pas inversible.

2) Montrer que s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $(A + I)^p = 0$, alors A est inversible et calculer son inverse.