

PRIMITIVES

1 POUR COMMENCER

Exercice 1 (*)

Préciser à chaque fois si F est une primitive de f .

- 1) $F(x) = x^2 - 5x + 3$ et $f(x) = x - 5$.
- 2) $F(x) = x^x$ et $f(x) = (\ln(x) + 1)x^x$.
- 3) $F(x) = \operatorname{Arctan}(x)$ et $f(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 (*)

Trouver les primitives à valeurs dans \mathbf{R} de chacune des fonctions suivantes :

- 1) $t \mapsto e^{3t}$.
- 2) $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{5}\right)$.
- 3) $t \mapsto t^5 + 2t^3 - t - 1$.
- 4) $t \mapsto (t-1)(t+1)$.
- 5) $t \mapsto \cos^2(t) + \sin^2(t)$.
- 6) $t \mapsto \cos^2(t) - \sin^2(t)$.
- 7) $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$.
- 8) $t \mapsto \ln(t+1)$.
- 9) $t \mapsto t(t^2+1)^n$.
- 10) $t \mapsto \frac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$.

Exercice 3 (*)

Donner une primitive à valeurs dans \mathbf{R} de :

- 1) $t \mapsto \tan t$.
- 2) $t \mapsto \frac{t+2}{t^2+4t}$.
- 3) $t \mapsto \frac{t+2}{\sqrt{t^2+4t}}$.
- 4) $t \mapsto te^{5t^2}$.
- 5) $t \mapsto \sin(t)\cos(t)$.
- 6) $t \mapsto \frac{t}{t^2-5}$.
- 7) $t \mapsto \operatorname{th}(t)$.
- 8) $t \mapsto \tan^2(t)$.
- 9) $t \mapsto \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}$.

Exercice 4 (**)

Donner une primitive à valeurs dans \mathbf{R} de :

- 1) $t \mapsto \frac{\ln^4(t)}{t}$.
- 2) $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$.
- 3) $t \mapsto \frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan(t)}}$.

Exercice 5 (***)

Donner une primitive à valeurs dans \mathbf{R} de :

- 1) $t \mapsto \frac{\ln(t)-1}{t^2}$.
- 2) $t \mapsto \frac{1}{t+\sqrt{t}}$.
- 3) $t \mapsto e^t \left(\frac{1}{t} + \ln(t) \right)$.

Exercice 6 (**)

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)} dx$.

2 INTÉGRATION PAR PARTIES

Exercice 7 (*)

Calculer

- 1) $\int_0^x t e^t dt$.
- 2) $\int_1^e t^2 \ln(t) dt$.
- 3) $\int_0^1 \operatorname{Arctan}(t) dt$.
- 4) $\int_0^\pi t \cos t dt$.

3 CHANGEMENT DE VARIABLE

Exercice 8 (*)

En s'aidant à chaque fois d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

- 1) $\int_e^x \frac{\ln(\ln t)}{t} dt$.
- 2) $\int_0^x e^t \cos(e^t) dt$.

Exercice 9 (**)

Calculer

- 1) $\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt$.
- 2) $\int_e^x \frac{\ln(t) dt}{t + t(\ln(t))^2}$.
- 3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4(t) dt$.
- 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sin(t)} dt$.

4 FONCTIONS CIRCULAIRES

Exercice 10 (**)

Calculer

- 1) $\int_0^x \cos^3(t) \sin^2(t) dt$.
- 2) $\int_0^x \cos^3(t) \sin(t) dt$.
- 3) $\int_0^x \cos^3(t) \sin^4(2t) dt$.

5 FONCTIONS RATIONNELLES

Exercice 11 (*)

Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes en indiquant le domaine de validité.

- 1) $t \mapsto \frac{1}{2t^2 + 5t + 2}$. 3) $t \mapsto \frac{1}{t^2 + 4t + 4}$.
 2) $t \mapsto \frac{1}{4t^2 - 4t + 1}$. 4) $t \mapsto \frac{t}{t^4 + 2t^2 + 3}$.

Exercice 12 ()**

Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes en indiquant le domaine de validité.

- 1) $t \mapsto \frac{1}{1 + \cos(t)}$. 2) $t \mapsto \frac{1}{2 + \cos(t)}$. 3) $t \mapsto \frac{\cos(t) - 1}{\cos(t) + 1}$.

Exercice 13 ()**

Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes en indiquant le domaine de validité.

- 1) $t \mapsto \frac{\text{th}(t)}{1 + \text{th}(t)}$. 2) $t \mapsto \frac{1}{\text{ch}(t) + 1}$.

6 ENTRAÎNEMENT

Exercice 14 ()**

Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée.

- 1) $x \mapsto \int_{-x}^x \frac{dt}{1 + t^4}$. 2) $x \mapsto \int_0^{2\pi} x \cos^5(tx) dt$.

Exercice 15 ()**

Calculer

- 1) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \text{Arcsin}(t) dt$ 2) $\int_0^1 t \text{Arctan}(t) dt$. 3) $\int_0^x e^t \cos(t) dt$.
 4) $\int_0^x e^{2t} \cos(e^t) dt$. 5) $\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$. 6) $\int_0^x e^{\sqrt{1+t}} dt$.

Exercice 16 ()**

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t) + \cos(t)} dt \quad \text{et} \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t) + \cos(t)} dt.$$

- 1) Montrer que $C = S$ grâce à un changement de variables.
 2) Que vaut $C + S$. En déduire les valeurs de C et de S .
 3) En déduire $\int_0^1 \frac{dt}{t + \sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 17 ()**

En s'aidant d'une formule de récurrence, calculer

$$u_n = \int_0^x t^n e^{-t} dt \quad \text{où } n \in \mathbf{N}.$$

On donnera l'expression sous forme de somme.

Exercice 18 ()**

Calculer

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{u}{2}\right) \ln(1 + \cos(u)) du.$$

Exercice 19 (*)**

Trouver une primitive de $t \mapsto \frac{\sin(t)}{3 + \sin(2t)}$.

Exercice 20 (*)**

Pour $x \in \mathbf{R}$, calculer

$$\int_0^{\sin^2(x)} \text{Arcsin}(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2(x)} \text{Arccos}(\sqrt{t}) dt.$$

Exercice 21 (*) (Intégrales de Wallis)**

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.

- 1) À l'aide de l'intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n+2} .
 2) Exprimer I_n en fonction de n en distinguant les cas n pair et n impair.
 3) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.
 À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_n = J_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.