Suites réelles

1 Pour commencer

Exercice 1 (Vrai / Faux)
Répondre en justifiant.

1. Le produit de deux suites majorées est-il nécessairement majoré ?
2. L'ensemble des suites stationnaires forme-il un espace vectoriel ?
3. Une suite non croissante est-elle nécessairement décroissante ?
4. Une suite qui converge vers une limite strictement positive ℓ a-t-elle tous ses termes strictement positifs à partir d'un certain rang ?
5. Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est-elle nécessairement décroissante à partir d'un certain rang ?
6. La somme (ou la différence) de deux suites divergentes est-elle nécessairement divergente ?
7. Existe-t-il une suite divergente $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$?
8. Une suite divergente est-elle nécessairement non bornée ?
9. Une suite non bornée est-elle nécessairement divergente ?

Exercice 2 (Conditions nécessaires et suffisantes)

1. Suffit-il qu'une suite soit croissante pour qu'elle admette une limite ?
2. Est-il nécessaire qu'une suite soit croissante pour qu'elle admette une limite ?
3. Une suite croissante admet-elle nécessairement une limite ?
4. Une suite qui admet une limite est-elle nécessairement croissante ?

2 Suites définies explicitement

A Nature et limite

Énoncé commun aux exercices de cette partie :
Vérifier que la suite est bien définie, trouver sa nature (avec démonstration), et calculer sa limite si elle existe.

Exercice 3 (*)

1. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{3n^2-2n+1}{n^6-2n^4-9}$.
2. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{3n^2-2n+1}{n\sqrt{n}+n-1}$.
3. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$.

Exercice 4 (*)

1. $\forall n\in\mathbf{N},\ u_n=\sqrt{1+n^2}-\sqrt{1+n}$.
2. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$.
3. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{n}}{n}$.
4. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}$.

Exercice 5 (*)

1. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{\sin\left(n^3\right)}{n}$.
2. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{1}{n}\sin n$.
3. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n}$.

Exercice 6 (*)

1. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n^2}$.
2. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{(-2)^n}{n^2}$.
3. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{\ln n}{n}$.
4. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{n!\ln(n)}{\mathrm{e}^n}$.
5. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{n}{\ln(n)}$.

Exercice 7 (**)

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Exercice 8 (**)

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\frac{\ln(n!)}{n^2}.$$

B Nature de suites

Exercice 9 (**)
Donner la nature de la suite définie par

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kn}.$$

Exercice 10 (**)
Soit (u_n) une suite monotone telle que (u_{2n}) converge. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 11 (**)
Soit la suite harmonique $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout $n\geqslant 1$ par $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $H_{2^{n+1}}\geqslant H_{2^n}+\frac{1}{2}$.
2. En déduire que H_n tend vers $+\infty$.

3 Suites usuelles

Exercice 12 (*)

1. (u_n) est une suite géométrique de raison 2 telle que $u_3 = 16$. Que vaut u_0.
2. (u_n) est une suite arithmétique de raison r et (v_n) est une suite géométrique de raison q telles que $u_0 = v_0$. À quelles conditions sur u_0, r et q a-t-on $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$?
3. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, avec $u_0 = 1$.
   Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   À quelle condition sur q, la suite S_n admet-elle une limite finie ?

Exercice 13 (*)
Exprimer u_n en fonction de n pour les suites :

1. $2u_{n+1} = 5u_n + 2$ et $u_0 = 2$.
2. $u_{n+1} = 1 - u_n$ et $u_0 = 2$.
3. $2u_{n+1} - 2u_n + 1 = 0$ et $u_0 = 4$.

Exercice 14 (*)
Soit la suite définie par $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

Montrer que u est arithmétique et donner sa raison.

Exercice 15 (***)
On définit par récurrence la suite (u_n) par

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \quad \text{et} \quad u_0 = 1.$$

1. Montrer que la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Trouver la valeur de (u_n) en fonction de n. *Indication : on pourra poser pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \ln(u_n)$ en justifiant l'existence et étudier v_n.*

4 Couples de suites

Exercice 16 (*)
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies ci-après. Montrer qu'elles convergent.

1. $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
2. $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 17 (**)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles à termes strictement positifs telles qu'à partir d'un certain rang n_0, on ait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

1. Montrer que si v converge vers 0 alors u aussi.
2. Montrer que si u diverge vers $+\infty$, alors v aussi.

Exercice 18 (**)

1. Soit (u_n) une suite numérique à valeurs positives et $\ell \geqslant 0$. On suppose que u_n^2 tend vers ℓ^2, montrer que u_n tend vers ℓ.
2. Est-ce encore vrai si on retire l'hypothèse de positivité de la suite ?
3. Montrer que si u et v sont deux suites réelles telles que $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \to 0$, alors $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$.

Exercice 19 (***)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $[0,1]^{\mathbf{N}}$ telles que $(u_n\, v_n)$ converge vers 1. Montrer que u et v convergent.

5 Suites obtenues par récurrence

Exercice 20 (**)
Soit (u_n) une suite bornée.
On suppose que la suite v définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$ tend vers 0.
Montrer que u_n tend vers 0.

Exercice 21 (**)
Étudier les suites (u_n) définies par

1. $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1}$.
2. $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 4$.
3. $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{3}{4} + u_n^2}$.
4. $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n + u_n^2}$.
5. $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n + u_n^2}$.

6 Exercices de perfectionnement

Ces exercices sont plus difficiles

Exercice 22 (***) (Irrationnalité de e)

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) ont une limite commune.
2. On admet que cette limite est $\mathrm{e} = \exp(1)$. Montrer que e est irrationnel.

Exercice 23 (***) (Quelques epsilons)
Soit u une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbf{R}$. Le but des deux premières questions est de montrer que la suite c définie ci-dessous converge vers ℓ.

$$\forall n \geqslant 1 \quad c_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. *Étape 1.* On suppose que u_n tend vers 0 ($\ell = 0$). On se propose alors de démontrer que c_n tend vers 0.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier N tel que :
   $$\forall n \geqslant N \quad |c_n| \leqslant \frac{|u_1| + \cdots + |u_{N-1}|}{n} + \varepsilon.$$
   (b) En déduire qu'il existe un entier $N' > N$ tel que : $\forall n \geqslant N' \quad |c_n| \leqslant 2\varepsilon$ et conclure.
2. *Cas général.* Si u_n tend vers ℓ, considérer la suite u' de terme général $u_n - \ell$ et utiliser l'étape 1 pour démontrer le théorème.
3. Réciproquement, si on suppose la suite c convergente, peut-on en déduire que la suite u est convergente ?

Exercice 24 (***)
Soit (u_n) une suite à valeurs positives telle que

$$\forall (p, q) \in \mathbf{N}^2, \quad u_{p+q} \leqslant u_p + u_q.$$

1. Justifier que $\inf_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{u_n}{n}$ existe.
2. Soit $q \in \mathbf{N}^*$, fixé et $n \geqslant q$.
   On peut donc écrire $n = kq + r$ avec $r \in [\![0, q-1]\!]$.
   Montrer que
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \geqslant q, \ \text{tel que } \forall n \geqslant n_0, \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_q}{q} + \varepsilon.$$
3. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n>0}$ converge et que
   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{u_n}{n}.$$