Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 (Ouverts)

1) Montrer que toute union d'ouverts est encore un ouvert.

2) Montrer que toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

3) Trouver une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.
Indication : s'inspirer des ouverts de $\mathbf{R}$.

Exercice 2 (**)
Montrer qu'une fonction f est continue si, et seulement si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.

Exercice 3 (*)
Représenter graphiquement le domaine de définition de la fonction

1) $f : (x, y) \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$

2) $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - y^2}$

3) $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - y}$

4) $f : (x, y) \mapsto \sqrt{xy}$

5) $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{x^2 + y^2 + xy}$

Exercice 4 (*)
Étudier les extrema locaux des fonctions suivantes (sur leur domaine de définition)

1) $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$

2) $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$

3) $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$

4) $f : (x, y) \mapsto x^4$

5) $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2y^2 + 1}$

6) $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2y^2 + 4(x - y) + 3}$

7) $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 9xy$

Exercice 5 (*)
Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ et $g : t \mapsto f\left(2 + 2t, t^2\right)$.

1) Démontrer que $g \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R})$.

2) Calculer la dérivée de g en fonction des dérivées partielles de f.

3) Soit $h : (u, v) \mapsto f\left(uv, u^2 + v^2\right)$.
Montrer que $h \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.

Exercice 6 (**)
On veut déterminer l'existence et l'équation de la droite de régression linéaire à partir de sa caractérisation :
« la droite $f(x) = ax + b$ qui minimise la somme des carrés des distances entre les points (x_i, y_i) et les points $(x_i, f(x_i))$ pour i décrivant l'échantillon fini. »
On suppose qu'il existe au moins deux valeurs x_i différentes.

1) À l'aide des fonctions de deux variables, obtenir l'existence et l'expression de cette droite.
On admettra que si une fonction $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est continue sur une boule fermée, alors elle admet un maximum et un minimum sur cette boule.

2) Retrouver le résultat par un raisonnement d'algèbre.

Exercice 7 (**)
Soit f définie sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}}}.$$

Justifier que f est prolongeable par continuité en $(0, 0)$ et étudier l'existence de dérivées partielles en $(0, 0)$ de la prolongée.

Exercice 8 (*)
On considère la demi-sphère ouverte supérieure de $\mathbf{R}^3$ de rayon $R > 0$ telle que $z > 0$.

1) Déterminer une paramétrisation sous la forme $z = f(x, y)$ avec $f \in \mathscr{C}^1$ sur un ouvert à préciser.

2) Montrer qu'on trouve bien que $(0, 0)$ est l'unique maximum (local et global) de cette surface.

3) En s'aidant du gradient, retrouver que les plans tangents sont orthogonaux aux rayons (des points pour lesquels sont définis les plans tangents).

Exercice 9 (CCINP 33)
On pose : $\forall\,(x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $f\,(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f\,(0,0)=0$.

1) Démontrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.

2) Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbf{R}^2$.

3) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$? Justifier.

Exercice 10 (CCINP 52)
Soit $\alpha\in\mathbf{R}$.
On considère l'application définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) Prouver que : $\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ x^2+y^2-xy\geqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

2) (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbf{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbf{R}^2$.

3) Dans cette question, on suppose que $\alpha=0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbf{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$?

Exercice 11 (CCINP 56)
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $\forall(x,\,y)\in\mathbf{R}^2$, $f(x,\,y)=2x^3+6xy-3y^2+2$.

1) f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbf{R}^2$? Si oui, les déterminer.

2) f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbf{R}^2$? Justifier.

3) On pose $K=[0,\,1]\times[0,\,1]$.
   Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

Exercice 12 (CCINP 57)

1) Soit f une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de «f différentiable en $(0,0)$».

2) On considère l'application définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.