GÉOMÉTRIE

1 VECTEURS

Ces exercices proposent de revoir des résultats du collège (5ème et 4ème) en utilisant le vocabulaire des vecteurs.

EXERCICE 1 (*)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

1) Montrer que $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|$.

2) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un parallélogramme soit un rectangle.

EXERCICE 2 (*) Soient A, B deux points du plan.

1) Trouver l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$$

2) À quel résultat de géométrie élémentaire cela correspond-il ?

EXERCICE 3 (**) Soient A, B deux points du plan.

1) Trouver l'ensemble des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.
Indication[1]

2) Interpréter géométriquement ce résultat à partir des connaissances du collège.

2 DROITES ET PLANS

EXERCICE 4 (*) (Équations)

1) Donner une équation cartésienne de la droite

$$(d) : \begin{cases} x &= 2t-1 \\ y &= -t-1 \end{cases}$$

2) Donner une équation paramétrique de la droite

$$(d') :\ y = 7x-1$$

3) Donner une équation paramétrique du cercle

$$(\mathscr{C}) :\ x^2+y^2-6x+4y = 5$$

EXERCICE 5 (*) Quelles équations représentent un cercle (non vide) ?

$$\begin{aligned}
(\mathscr{C}_1) &: x^2-y^2+3x-1=0 \\
(\mathscr{C}_2) &: -3x^2-3y^2+3x-4=0 \\
(\mathscr{C}_3) &: x^2+y^2+3xy-2y+1=0 \\
(\mathscr{C}_4) &: x^2+y^2+3=y \\
(\mathscr{C}_5) &: x^2+2y^2+3xy-2y+1=0 \\
(\mathscr{C}_6) &: x^2+y^2+y-x=0
\end{aligned}$$

[1] Faire intervenir le milieu I de $[AB]$

EXERCICE 6 (*) Représenter géométriquement l'ensemble

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \text{tel que } x^2+y^2+2x-2y\le 0\right\}$$

EXERCICE 7 (**) Soient deux points de l'espace

$$A(0,3,-1) \qquad B(1,1,0)$$

(d) est la droite de l'espace qui passe par ces deux points.

1) Donner une équation paramétrique de la droite (d).

2) Donner une représentation cartésienne de la droite (d).

EXERCICE 8 (*) Soient les trois points de l'espace

$$A(0,3,-1) \qquad B(1,1,0) \qquad C(1,-1,2)$$

$\mathscr{P}$ est le plan qui passe par les trois points.

1) Justifier que $\mathscr{P}$ désigne bien un plan.

2) Donner un système d'équations paramétrique de ce plan.

3) Donner une équation cartésienne du plan.

EXERCICE 9 (*) (Intersection)
Soit deux droites (d) et (d') définies par

$$(d) :\ x+3y-4=0 \quad \text{et} \quad (d') :\ x+y=1$$

Trouver $(d)\cap(d')$.

EXERCICE 10 (*) (Intersection)
Soit une droite (d) et un cercle $(\mathscr{C})$ définis par

$$(d) :\ x+3y-4=0 \quad \text{et} \quad (\mathscr{C}) :\ x^2+y^2+4y-16=0$$

Trouver $(d)\cap(\mathscr{C})$.

EXERCICE 11 (*) (Intersection de droites)
Soient deux droites (d) et (d') définies paramétriquement par

$$(d) : \begin{cases} x &= 2t-3 \\ y &= -t+5 \end{cases} \quad \text{et} \quad (d') : \begin{cases} x &= 3t'-3 \\ y &= -t'+4 \end{cases}$$

On se propose de trouver leur intersection de plusieurs manières différentes.

1) (Résolution d'un système) En résolvant un système d'inconnues t et t', trouver $(d)\cap(d')$.

2) (Par substitution)

(a) Donner l'équation cartésienne de (d).

(b) En déduire $(d)\cap(d')$ par substitution de x et y.

Exercice 12 (**) (Perpendiculaire commune)
Soient (d_1) et (d_2) d'équations

$$(d_1) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \text{Vect}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (d_2) = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Déterminer la droite Δ perpendiculaire aux deux droites telle que $(d_1), (d_2)$ et Δ soient concourantes.

Exercice 13 (***) (Distance à une droite)
Soit la droite d'équation cartésienne $(d) : ax + by + c = 0$ avec (a, b) non tous nuls, et $A(x_0, y_0)$ un point du plan.

1) Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ normal à (d).

2) En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AH}$ colinéaire à $\overrightarrow{v}$, tel que $H \in (d)$.

3) En déduire la distance de A à (d).

Exercice 14 (**)
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit

$$(d) \begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

et $(\mathscr{P})$ le plan de vecteur normal $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix}$ et passant par le point $A = \begin{pmatrix}1\\-1\\\lambda\end{pmatrix}$.

1) Donner la nature géomtrique de (d) en fonction de λ.

2) Étudier la nature de $(d) \cap (\mathscr{P})$ en fonction de λ.

3 Barycentres

Exercice 15 (*) On considère les points $A(-1, 2)$, $B(2, 0)$, $C(1, -1)$, $D(3, 1)$.
Donner les coordonnées du barycentre de

$$\{(A, 1), (B, -1), (C, 2), (D, 1)\}$$

Exercice 16 (*) Soit le triangle de sommets $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(1, 2)$.
Donner les coordonnées de son centre de gravité.

Exercice 17 (**) ABC est un triangle équilatéral, et I est le milieu de $[BC]$, H est le projeté orthogonal de I sur $[AB]$.

1) Montrer que H est le barycentre de $\{(A, 1), (B, 3)\}$

2) Montrer que le barycentre de $\{(A, 1), (B, 5), (C, 2)\}$ est le milieu de $[IH]$

Exercice 18 (***)
Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{E}_m$ des points M qui vérifient

$$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \cdot \overrightarrow{MD} = 3m$$

Indication[2]

[2] S'inspirer de l'exercice 2 ou de l'exercice 3