

# INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

## 1 CONTINUITÉ UNIFORME

### Exercice 1 (\*)

À chaque fois, prouver le résultat.

- 1) Donner un exemple de fonction uniformément continue sur  $\mathbf{R}$ .
- 2) Donner un exemple de fonction qui est continue sans être uniformément continue sur  $\mathbf{R}$ .
- 3) Donner un exemple de fonction qui est continue sans être uniformément continue sur  $]0, 1[$ .

### Exercice 2 (\*\*)

- 1) Montrer qu'une fonction continue sur  $[0, +\infty[$  qui admet une limite finie en  $+\infty$  est uniformément continue sur  $[0, +\infty[$ .
- 2) Trouver une fonction uniformément continue sur  $[0, +\infty[$  qui n'admet pas de limite en  $+\infty$ .
- 3) Trouver une fonction uniformément continue sur  $[0, +\infty[$  qui admet une limite infinie en  $+\infty$ .

### Exercice 3 (\*\*)

Soient  $a < b$  et  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ .

- 1) On suppose que  $f$  est prolongeable par continuité en  $b$ .  
Montrer que  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ .
- 2) Montrer que la réciproque est aussi vraie.

## 2 INTÉGRALE SUR UN SEGMENT

### Exercice 4 (\*)

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ .

Montrer que si  $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$ , alors  $f$  admet un point fixe.

### Exercice 5 (\*)

On définit  $f$  sur  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  par

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos 2t} dt.$$

- 1) Montrer que  $f$  est impaire.
- 2) Montrer que  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ,  $f(x) \leq x$ .
- 3) Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ .

### Exercice 6 (\*\*)

On définit la fonction  $F$  par

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{3 - \cos(t)}.$$

- 1) Étudier la parité et la dérivabilité de  $F$ .
- 2) Montrer que  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $F(x + 2\pi) = F(x) + F(2\pi)$ .
- 3) (a) En s'aidant du changement de variable  $u = \tan(t/2)$ , calculer  $F(x)$  sur  $] -\pi, \pi[$ .  
(b) En déduire  $F(2\pi)$ .  
(c) Calculer  $F(x)$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ .

### Exercice 7 (\*\*)

Soit

$$F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1 + \sin t} dt.$$

- 1) Justifier la définition et la régularité de  $F$  sur  $[0, \pi]$ .
- 2) Calculer  $F(x)$  pour  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .
- 3) Calculer  $F(\frac{\pi}{2})$ .
- 4) En utilisant un argument de symétrie, en déduire la valeur de  $F(\pi)$ .

### Exercice 8 (\*)

Trouver toutes les fonctions  $f$  continues sur  $\mathbf{R}$  telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad 2f(x) = 3x \int_0^x f(t) dt.$$

**Exercice 9 (\*\*)**

Déterminer toutes les fonctions continues  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  telles que,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \int_0^x f(t) dt = xf(x).$$

**Exercice 10 (\*\*\*)**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue non identiquement nulle telle que  $\int_a^b f(x) dx = 0$ .

- 1) Montrer que  $f$  s'annule au moins une fois dans  $]a, b[$ .
- 2) On suppose de plus que  $\int_a^b xf(x) dx = 0$ . Montrer que  $f$  s'annule au moins deux fois dans  $]a, b[$ .
- 3) Soit  $P$  un polynôme tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \int_0^1 P(t)t^n dt = 0.$$

Montrer que  $P = 0$ .

**3 LIMITES**

**Exercice 11 (méthode)**

Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n e^t}{1+t^2} dt.$$

- 1) Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.
- 2) Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$u_n = \frac{e}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}(1-t)^2 e^t}{(1+t^2)^2} dt.$$

- 3) En déduire un équivalent simple de  $u_n$  pour  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 12**

Montrer que

$$\int_0^1 \frac{t^n}{e^t + 1} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n(e+1)}.$$

**Exercice 13**

Montrer que

$$\int_x^{x+1} e^t \ln(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x \ln(x) (e-1).$$

**Exercice 14 (\*\*)**

On considère la fonction  $H$  définie sur  $]1; +\infty[$  par  $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ .

- 1) Montrer que  $H$  est  $C^1$  sur  $]1; +\infty[$  et calculer sa dérivée.
- 2) Montrer que la fonction  $u$  définie par  $u(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$  admet une limite finie en  $x = 1$ .
- 3) En utilisant la fonction  $u$  de la question 2., calculer la limite en  $1^+$  de la fonction  $H$ .

**Exercice 15 (\*\*\*)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}_+)$ .

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f^n \right)^{\frac{1}{n}}.$$

**Exercice 16 (\*\*\*)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$  et  $F$  définie par

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

- 1) Montrer que si  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $+\infty$ , alors  $F$  admet la même limite  $\ell$  en  $+\infty$ .
- 2) Donner un exemple où  $f$  n'a pas de limite en  $+\infty$  et  $F \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .
- 3) Montrer que si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , alors  $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Exercice 17 (\*\*)**

Calculer les limites :

- 1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt.$
- 3)  $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(a \sin t) dt.$

## 4 SOMMES DE RIEMANN

### Exercice 18 (\*)

Donner un équivalent lorsque  $n \rightarrow +\infty$  de

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}.$$

### Exercice 19 (\*\*)

Donner un équivalent lorsque  $n \rightarrow +\infty$  de

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

### Exercice 20 (\*\*\*) Intégrale de Poisson)

Soit  $x > 1$ , calculer

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos t + x^2) dt.$$

## 5 FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL

### Exercice 21 (\*\*)

1) Soit  $x \in \mathbf{R}$ . Montrer que  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ .

2) Montrer que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$ .

### Exercice 22 (\*\*)

Montrer que :

1)  $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}_+^*, e^x > \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ .

2)  $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \text{Arctan } x < x$ .

3)  $\forall x \in \mathbf{R}, \sin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

## 6 FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

### Exercice 23 (\*) (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Soit  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$ .

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0.$$

Le « vrai » lemme est aussi valable pour des fonctions continues.

### Exercice 24

1) Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ .

Montrer que  $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$  si, et seulement si  $f$  est de signe constant sur  $[a, b]$ .

2) Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{C})$ .

À quelle condition a-t-on  $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$  ?