

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

1 CONTINUITÉ UNIFORME

Exercice 1 (*)

À chaque fois, prouver le résultat.

- 1) Donner un exemple de fonction uniformément continue sur \mathbf{R} .
- 2) Donner un exemple de fonction qui est continue sans être uniformément continue sur \mathbf{R} .
- 3) Donner un exemple de fonction qui est continue sans être uniformément continue sur $]0, 1[$.

Exercice 2 (**)

- 1) Montrer qu'une fonction continue sur $[0, +\infty[$ qui admet une limite finie en $+\infty$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.
- 2) Trouver une fonction uniformément continue sur $[0, +\infty[$ qui n'admet pas de limite en $+\infty$.
- 3) Trouver une fonction uniformément continue sur $[0, +\infty[$ qui admet une limite infinie en $+\infty$.

Exercice 3 (***)

Soient $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$.

- 1) On suppose que f est prolongeable par continuité en b .
Montrer que f est uniformément continue sur $[a, b]$.
- 2) Montrer que la réciproque est aussi vraie.

2 INTÉGRALE SUR UN SEGMENT

Exercice 4 (*)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$.

Montrer que si $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$, alors f admet un point fixe.

Exercice 5 (*)

On définit f sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ par

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos 2t} dt.$$

- 1) Montrer que f est impaire.
- 2) Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $f(x) \leq x$.
- 3) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Exercice 6 (**)

On définit la fonction F par

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{3 - \cos(t)}.$$

- 1) Étudier la parité et la dérivabilité de F .
- 2) Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $F(x + 2\pi) = F(x) + F(2\pi)$.
- 3) (a) En s'aidant du changement de variable $u = \tan(t/2)$, calculer $F(x)$ sur $] -\pi, \pi[$.
(b) En déduire $F(2\pi)$.
(c) Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 7 (**)

Soit

$$F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1 + \sin t} dt.$$

- 1) Justifier la définition et la régularité de F sur $[0, \pi]$.
- 2) Calculer $F(x)$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- 3) Calculer $F(\frac{\pi}{2})$.
- 4) En utilisant un argument de symétrie, en déduire la valeur de $F(\pi)$.

Exercice 8 (*)

Trouver toutes les fonctions f continues sur \mathbf{R} telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad 2f(x) = 3x \int_0^x f(t) dt.$$

Exercice 9 ()**

Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telles que,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \int_0^x f(t) dt = xf(x).$$

Exercice 10 (*)**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue non identiquement nulle telle que $\int_a^b f(x) dx = 0$.

- 1) Montrer que f s'annule au moins une fois dans $]a, b[$.
- 2) On suppose de plus que $\int_a^b xf(x) dx = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois dans $]a, b[$.
- 3) Soit P un polynôme tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \int_0^1 P(t)t^n dt = 0.$$

Montrer que $P = 0$.

3 LIMITES

Exercice 11 (méthode)

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n e^t}{1+t^2} dt.$$

- 1) Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.
- 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \frac{e}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}(1-t)^2 e^t}{(1+t^2)^2} dt.$$

- 3) En déduire un équivalent simple de u_n pour $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 12

Montrer que

$$\int_0^1 \frac{t^n}{e^t + 1} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n(e+1)}.$$

Exercice 13

Montrer que

$$\int_x^{x+1} e^t \ln(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x \ln(x) (e-1).$$

Exercice 14 ()**

On considère la fonction H définie sur $]1; +\infty[$ par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

- 1) Montrer que H est C^1 sur $]1; +\infty[$ et calculer sa dérivée.
- 2) Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
- 3) En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H .

Exercice 15 (*)**

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}_+)$.

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f^n \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 16 (*)**

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ et F définie par

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

- 1) Montrer que si f admet une limite ℓ en $+\infty$, alors F admet la même limite ℓ en $+\infty$.
- 2) Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$ et $F \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- 3) Montrer que si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, alors $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 17 ()**

Calculer les limites :

- 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt.$
- 3) $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(a \sin t) dt.$

4 SOMMES DE RIEMANN

Exercice 18 (*)

Donner un équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}.$$

Exercice 19 ()**

Donner un équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$ de

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 20 (*) (Intégrale de Poisson)**

Soit $x > 1$, calculer

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos t + x^2) dt.$$

- 1) Réaliser le calcul avec les sommes de Riemann.
- 2) Autre méthode :
 - (a) Montrer que f est paire.
 - (b) Calculer pour $x \neq 0$, $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$.
 - (c) Montrer que pour $x > 0$, $f(x^2) = 2f(x)$.
 - (d) En déduire la valeur de f en tout $x > 1$.

5 FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL

Exercice 21 ()**

- 1) Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.
- 2) Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.

Exercice 22 ()**

Montrer que :

- 1) $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}_+, e^x > \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.
- 2) $\forall x \in \mathbf{R}_+, \operatorname{Arctan} x < x$.
- 3) $\forall x \in \mathbf{R}, \sin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.

6 FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

Exercice 23 (*) (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$.

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0.$$

Le « vrai » lemme est aussi valable pour des fonctions continues.

Exercice 24

1) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$.

Montrer que $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$ si, et seulement si f est de signe constant sur $[a, b]$.

2) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{C})$.

À quelle condition a-t-on $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$?

7 APPROFONDISSEMENT

Exercice 25 (***)

On définit la fonction f sur $[0, 1]$

- si $x \in [0, 1] \cap \mathbf{Q}$, alors x s'écrit de façon irréductible $x = \frac{p}{q}$ et on pose $f(x) = \frac{1}{q}$.
- sinon on pose $f(x) = 0$.

1) Montrer que f est bornée.

2) Montrer que f n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$.

3) Si on note $S_f = \left\{ \int_0^1 \psi, \psi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \text{ en escalier et } f \leq \psi \right\}$

et $I_f = \left\{ \int_0^1 \varphi, \varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \text{ en escalier et } \varphi \leq f \right\}$.

Montrer que $\inf S_f = \sup I_f$.

Cet exercice montre qu'on peut intégrer sur un segment des fonctions qui ne sont pas continues par morceaux.