Intégration sur un segment

1 Continuité uniforme

Exercice 1 (*)
À chaque fois, prouver le résultat.

1) Donner un exemple de fonction uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

2) Donner un exemple de fonction qui est continue sans être uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

3) Donner un exemple de fonction qui est continue sans être uniformément continue sur $]0,\,1[$.

Exercice 2 (**)

1) Montrer qu'une fonction continue sur $[0,\,+\infty[$ qui admet une limite finie en $+\infty$ est uniformément continue sur $[0,\,+\infty[$.

2) Trouver une fonction uniformément continue sur $[0,\,+\infty[$ qui n'admet pas de limite en $+\infty$.

3) Trouver une fonction uniformément continue sur $[0,\,+\infty[$ qui admet une limite infinie en $+\infty$.

Exercice 3 (***)
Soient $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^0\left([a,\,b[\right)$.

1) On suppose que f est prolongeable par continuité en b.
Montrer que f est uniformément continue sur $[a,\,b[$.

2) Montrer que la réciproque est aussi vraie.

2 Intégrale sur un segment

Exercice 4 (*)
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$.
Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$, alors f admet un point fixe.

Exercice 5 (*)
On définit f sur $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ par

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que f est impaire.

2) Montrer que $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right],\ f(x) \leqslant x$.

3) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 6 (**)
On définit la fonction F par

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{3-\cos(t)}.$$

1) Étudier la parité et la dérivabilité de F.

2) Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}, F(x+2\pi) = F(x) + F(2\pi)$.

3) (a) En s'aidant du changement de variable $u = \tan(t/2)$, calculer $F(x)$ sur $]-\pi,\pi[$.
   (b) En déduire $F(2\pi)$.
   (c) Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 7 (**)
Soit

$$F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1+\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

1) Justifier la définition et la régularité de F sur $[0,\pi]$.

2) Calculer $F(x)$ pour $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$.

3) Calculer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

4) En utilisant un argument de symétrie, en déduire la valeur de $F(\pi)$.

Exercice 8 (*)
Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad 2f(x) = 3x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 9 (**)
Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x f(x).$$

Exercice 10 (***)
Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue non identiquement nulle telle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

1) Montrer que f s'annule au moins une fois dans $]a,b[$.
2) On suppose de plus que $\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois dans $]a,b[$.
3) Soit P un polynôme tel que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \int_0^1 P(t) t^n\,\mathrm{d}t = 0.$$
Montrer que $P = 0$.

3 Limites

Exercice 11 (méthode)
Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose
$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n\,\mathrm{e}^t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$u_n = \frac{\mathrm{e}}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}(1-t)^2\,\mathrm{e}^t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$
3) En déduire un équivalent simple de u_n pour $n \to +\infty$.

Exercice 12
Montrer que
$$\int_0^1 \frac{t^n}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(\mathrm{e}+1)}.$$

Exercice 13
Montrer que
$$\int_x^{x+1} \mathrm{e}^t \ln(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x \ln(x)\,(\mathrm{e}-1).$$

Exercice 14 (**)
On considère la fonction H définie sur $]1;+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1) Montrer que H est C^1 sur $]1;+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2) Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
3) En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

Exercice 15 (***)
Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}_+)$.
Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 16 (***)
Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$ et F définie par
$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que si f admet une limite ℓ en $+\infty$, alors F admet la même limite ℓ en $+\infty$.
2) Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$ et $F \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3) Montrer que si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 17 (**)
Calculer les limites :

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$
2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$
3) $\displaystyle\lim_{a\to0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(a\sin t)\,\mathrm{d}t.$

4 Sommes de Riemann

Exercice 18 (*)
Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}.$$

Exercice 19 (**)
Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 20 (***) (Intégrale de Poisson)
Soit $x > 1$, calculer

$$\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos t + x^2)\,\mathrm{d}t.$$

1) Réaliser le calcul avec les sommes de Riemann.

2) Autre méthode :

   (a) Montrer que f est paire.

   (b) Calculer pour $x \neq 0$, $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$.

   (c) Montrer que pour $x > 0$, $f\left(x^2\right) = 2f(x)$.

   (d) En déduire la valeur de f en tout $x > 1$.

5 Formule de Taylor avec reste intégral

Exercice 21 (**)

1) Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.

Exercice 22 (**)
Montrer que :

1) $\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \ \mathrm{e}^x > \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

2) $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \operatorname{Arctan} x < x$.

3) $\forall x \in \mathbf{R},\ \sin x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.

6 Fonctions à valeurs complexes

Exercice 23 (*) (Lemme de Riemann-Lebesgue)
Soit $f \in \mathscr{C}^1([a, b], \mathbf{R})$.
Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = 0.$$
Le « vrai » lemme est aussi valable pour des fonctions continues.

Exercice 24

1) Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbf{R})$.
Montrer que $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$ si, et seulement si f est de signe constant sur $[a, b]$.

2) Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbf{C})$.
À quelle condition a-t-on $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$?