Intégration sur un segment

1 Intégrale sur un segment

Exercice 1 (*)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$.
Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$, alors f admet un point fixe.

Exercice 2 (Dérivabilité)
Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée.

1. $\displaystyle x \mapsto \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$
2. $\displaystyle x \mapsto \int_0^{2\pi} x\cos^5(tx)\,\mathrm{d}t$

Exercice 3 (**)
On définit la fonction F par

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{3-\cos(t)}$$

1. Étudier la parité et la dérivabilité de F.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}, F(x+2\pi) = F(x) + F(2\pi)$.
3. (a) (***) En s'aidant du changement de variable $u = \tan(t/2)$, calculer $F(x)$ sur $]-\pi, \pi[$.
   (b) En déduire $F(2\pi)$.
   (c) Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

2 Utilisation de la continuité

Exercice 4 (**)
Soit

$$F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier la définition et la régularité de F sur $[0,\pi]$.
2. Calculer $F(x)$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
3. Calculer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$
4. En utilisant un argument de symétrie, en déduire la valeur de $F(\pi)$.

Exercice 5 (***)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbf{R}_+)$.
Le but de cet exercice est de déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

On pose $M = \sup\limits_{[a,b]} f$.

1. Justifier l'existence de M, et montrer que $M \in \mathbf{R}_+$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M(b-a)^{\frac{1}{n}}$.
3. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que,
   $\forall n > N_1, \quad \left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M + \varepsilon.$
   (b) Montrer qu'il existe un intervalle $J = [c,d]$, non réduit à un point, inclus dans $[a,b]$, tel que, pour tout $t \in J$, on ait $f(t) \geqslant M - \frac{\varepsilon}{2}$.
4. Conclure.

3 Sommes de Riemann

Exercice 6 (*)
Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$$

Exercice 7 (**)
Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$