Limites et continuité

1 Limites et équivalents

Exercice 1 (*)
Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle admet une limite au point a, une limite à droite, à gauche.
Si elle est définie en a, étudier sa continuité en a, à droite de a, à gauche de a.
Si elle n'est pas définie en a, étudier si elle admet un prolongement par continuité en a.

1) $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ en $a = 1$.

2) $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$ en $a = 0$.

3) $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ en $a = 1$.

4) $x \mapsto x \left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$ en $a = 0$.

5) $x \mapsto x \sin \dfrac{1}{x}$ en $a = 0$.

6) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ en $a = 0$.

7) $x \mapsto \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 1}$ en $a = 1$.

8) $x \mapsto \sqrt{x} \ln x$ en $a = 0$.

9) $x \mapsto |x| \ln |x|$ en $a = 0$.

10) $x \mapsto x^\pi$ en $a = 0$.

11) $x \mapsto \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$ en $a = 1$.

12) $x \mapsto \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 7x}$ en $a = 0$.

Exercice 2 (*) (méthode)
Donner un équivalent en 1 de la fonction suivante

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x^2 - 1}.$$

Exercice 3 (**)
Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle admet un prolongement par continuité en a, et le donner s'il existe.

1) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ en $a = 0$.

2) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ en $a = 0$.

3) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}-1}}{x}$ en $a = 0$.

4) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - 1}{x}$ en $a = 0$.

5) $x \mapsto \dfrac{x \ln(1+x)}{\tan^2 x} \cos x$ en $a = 0$.

6) $x \mapsto \dfrac{x\,\mathrm{e}^x - 1}{\sin x}$ en $a = 0$.

7) $x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-x}$ en $a = 0$.

Exercice 4 (*)
Pour chacune des expressions suivantes, donner un équivalent simple en a.

1) $x^5 - 3x^4 + x^2 - 2$ en $a = +\infty$.

2) $x^5 - 3x^4 + x^2 - 2$ en $a = 0$.

3) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ en $a = +\infty$.

4) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ en $a = 0$.

5) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ en $a = 1$.

6) $x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} - x$ en $a = +\infty$.

Exercice 5 (**)
Pour chacune des expressions suivantes, donner un équivalent simple en a.

1) $\mathrm{e}^{\tan x} - \mathrm{e}^{\sin x}$ en $a = 0$.

2) $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$ en $a = 0$.

3) $\ln(\cos x)$ en $a = 0$.

4) $\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^x - 1$ en $a = +\infty$.

5) $\left(\cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$ en $a = +\infty$.

6) $\frac{\ln^2 x}{(x-1)\sin x} \sqrt{x} - 1$ en $a = 1$.

7) $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\sin^3 x} \left(\sqrt{\cos x} - 1\right)$ en $a = 0$.

8) $x \ln(1 + x^2) - 2x \ln x$ en $a = +\infty$.

9) $(\tan x) \tan(2x)$ en $a = \frac{\pi}{2}$.

10) $\sqrt{1 + \sin x} - \frac{1 - \sin x}{x}$ en $a = 0$.

Exercice 6 (***)
Déterminer les limites suivantes si elles existent :

1. $\lim\limits_{x \to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
2. $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x) \ln(\ln x)$.

2 Continuité

Exercice 7 (*)
Montrer qu'une fonction polynomiale réelle de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 8 (**)
Montrer qu'une application continue périodique sur $\mathbf{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 9 (**)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1]; [0,1])$.
Montrer que f admet un point fixe dans $[0,1]$, c'est-à-dire $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 10 (**)
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f. On le notera D.
2. Déterminer la parité de f.
3. Montrer que f est bijective de $\mathbf{R}$ dans un intervalle à déterminer.
4. Représenter graphiquement f et f^{-1} dans un repère orthonormé (indiquer ses éventuelles asymptotes et ses tangentes remarquables).

Exercice 11 (**)
Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, continue, telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, f(x) < x.$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}_+^*$, avec $a \leqslant b$, il existe $M \in [0, 1[$, tel que $\forall x \in [a, b],\ f(x) \leqslant Mx$.

3 Suites implicites

Exercice 12
Soit $n \geqslant 3$.

1. Montrer que l'équation $e^x = x^n$ admet deux solutions sur $]0, +\infty[$, notées u_n et v_n et telles que $1 < u_n < e < v_n$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
4. Montrer que $v_n \sim n \ln n$.

Exercice 13
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k.$$

1. Pour tout $n \geqslant 1$, montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}_+$ que l'on notera u_n.
2. En comparant $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, montrer que la suite u est monotone.
3. En déduire que la suite converge.

Exercice 14
Soit $n \in \mathbf{N}^*$,
On considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_n(x) = x^{n+1} - x^{n-1} + 1$$

1. Dresser le tableau de variations de f_n, préciser le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 3 + \frac{1}{n}$.
2. On note x_n l'unique solution positive de l'équation précédente.
   (a) Déterminer x_1.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ x_n \geqslant 1$.
   (c) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $x \geqslant 1$. En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
4. Écrire un programme Python qui calcule la valeur de x_n pour $n \in \mathbf{N}^*$ fixé.

4 Approfondissement

Exercice 15 (**)
Étudier la continuité sur $\mathbf{R}$ de l'application

$$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

Exercice 16 (***)
La fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}.$$

admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 17 (***)
Étudier la continuité de la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$.

$$f : x \mapsto \sup_{n\in\mathbf{N}} \frac{x^n}{n!}.$$

Exercice 18 (***)
Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ une application croissante telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante.
Montrer que f est continue.

Exercice 19 (***)
Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction croissante sur $]a, b]$ et continue en a.
Montrer que f est croissante sur $[a, b]$.
Faire de même avec la stricte croissance.