Exercices de Mathématiques

Année 2025-2026

Lycée Albert Schweitzer (Le Raincy)

Enseignant : X. Molin

« Quand une chose me tenait, je ne comptais pas les heures ni les jours que j'y passais, quitte à oublier tout le reste. »

A. Grothendieck, Récoltes et Semailles

Calvin and Hobbes by Bill Watterson

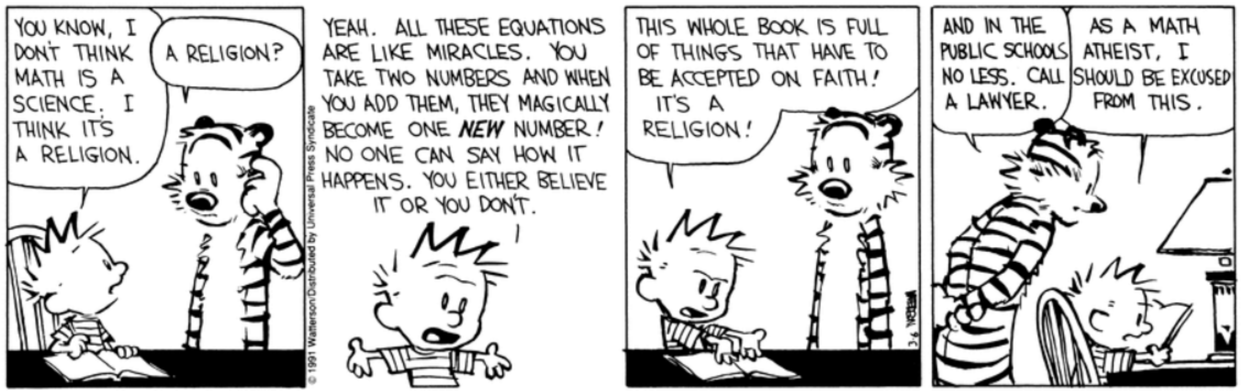


Table des chapitres

1– Fondamentaux

I Récurrence et suites usuelles

Peu de ces exercices font appel à la récurrence.
D'autres exercices de récurrence sont placés dans le chapitre de logique.

Application directe du cours

Exercice 1 (*)

1) (u_n) est une suite géométrique de raison 2 telle que $u_3 = 16$. Que vaut u_0.
2) (u_n) est une suite arithmétique de raison r et (v_n) est une suite géométrique de raison q telles que $u_0 = v_0$.
À quelles conditions sur u_0, r et q a-t-on $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$?
3) Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, avec $u_0 = 1$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
À quelle condition sur $q \in \mathbf{R}$, la suite S_n admet-elle une limite finie ?

Exercice 2 (*)
Exprimer u_n en fonction de n pour les suites définies par :

1) $2u_{n+1} = 5u_n + 2$ et $u_0 = 2$,
2) $u_{n+1} = 1 - u_n$ et $u_1 = 2$,
3) $2u_{n+1} - 2u_n + 1 = 0$ et $u_0 = 4$.

Exercice 3 (*)
Soit la suite définie par $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2}$.
Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

Exercice 4 (*)
Exprimer u_n en fonction de n pour les suites définies par :

1) $u_{n+2} + 2u_{n+1} = 3u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$,
2) $3u_{n+2} - 6u_{n+1} + 3u_n = 0$ et $u_0 = 1, u_1 = 3$,
3) $u_{n+2} = -2u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$,
4) $u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$ et $u_0 = u_1 = 1$.

Exercice 5 (*)
Exprimer u_n en fonction de n pour les suites définies par :

1) $\forall n \in \mathbf{N}, \quad 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n = 1$.
2) $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n + n$.

Exprimer u_n en fonction de n et des conditions initiales.

Méthodes

Exercice 6 (**)
Soient (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} + u_n + 2v_n = 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 3u_n + 4v_n.$$

Donner les expressions de u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 7 (**)
Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad v_n = u_{n+1} + u_n \quad \text{et} \quad u_n = \frac{v_{n+1} - v_n}{4}.$$

Donner les expressions de u_n et de v_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 8 (***)
On définit par récurrence la suite (u_n) par $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \quad \text{et} \quad u_0 = 1$.

1) Montrer que la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2) Trouver la valeur de (u_n) en fonction de n.

Divers

Exercice 9 (**) (Tour d'Hanoï)
Combien de coups faut-il au minimum pour déplacer la pile de n rondelles de la première à la dernière tige ?
Rappel des règles : Le jeu contient trois tiges verticales. Au début du jeu la première tige contient n rondelles et les deux suivantes sont vides.
Les n rondelles sont circulaires et de diamètres tous différents. Lors du jeu, on déplace les rondelles une à une entre les tiges. À chaque étape du jeu, le diamètre d'une rondelle sur une tige doit toujours être inférieur à celui des rondelles en dessous.
Le but du jeu est de déplacer toutes les rondelles de la première à la dernière tige en le minimum d'étapes.

Exercice 10 (***) (partie entière)
On définit la suite (u_n) par

$$u_0 \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 2u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1.$$

1) Montrer que la suite u est bien définie.

2) Calculer u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

On rappelle que la partie entière de x notée $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Ainsi, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

II Sommes et produits

Sommes

Exercice 1 (*) (Pour commencer)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbf{C}$, calculer les sommes :

1) $\sum_{k=0}^{10} 5$.
2) $\sum_{k=1}^{n} 3^n$.
3) $\sum_{k=n}^{2n} a$.
4) $\sum_{k=0}^{n} 3\left(a^k+1\right)$.
5) $\sum_{k=0}^{n} 3a^{k+1}$.
6) $\sum_{k=-n}^{0} k$.
7) $\sum_{k=-n}^{n} (2k+1)$.
8) $\sum_{k=-5}^{-10} a$.
9) $\sum_{k=1}^{n} k(k+2)$.

Exercice 2 (*)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbf{C}$, calculer les sommes :

1) $\sum_{k=-2}^{7} (-1)$.
2) $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ak}$.
3) $\sum_{k=1}^{n} a^{2k+1}$.
4) $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2$.
5) $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k$.
6) $\sum_{k=-n}^{2n} n^k$.

Exercice 3 (**) (changement d'indice)
Remplacer le ? par sa valeur dans les égalités suivantes :

1) $\sum_{k=1}^{n} (k+1)a_k = \sum_{j=?}^{?} ja_?$.
2) $\sum_{k=2}^{n+3} a_{k-1} = \sum_{j=?}^{?} a_j$.
3) $\sum_{k=1}^{n+1} a_{n-k} = \sum_{j=?}^{?} a_j$.
4) $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k+1} = \sum_{k=?}^{?} a_k$.

Exercice 4 (**)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.
2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$.

Exercice 5 (**)
Soit $a \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} ka^k$.

1) Calculer S_n lorsque $a = 1$.
2) Lorsque $a \neq 1$, calculer $aS_n - S_n$, en déduire la valeur de S_n.

Exercice 6 (**) (Inégalité classique)
Soit p un nombre entier, $p \geqslant 2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p^k} \leqslant \frac{p}{p-1}.$$

Sommes doubles

Exercice 7 (*)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer les sommes :

1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} i$.
2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 2^{i+j}$.
3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j}$.
4) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} (2i+j)$.
5) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(2^i+j\right)$.

Exercice 8 (**)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer les sommes :

1) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$.
2) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} ij$.
3) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} i+j$.

Exercice 9 (**)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer les sommes :

1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(i,j)$.

2) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|$.

Exercice 10 (***)
Pour $n \geqslant 1$, calculer

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{i+j}.$$

Produits

Exercice 11 (*)
Pour $a \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, calculer les produits suivants :

1) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+3}$.

2) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

3) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}a^k$.

4) $\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{2n}(-1)^k(n-k)$.

Exercice 12 (*)
Simplifier en utilisant la notation factorielle :

1) $6\times5\times4\times3$.

2) $\dfrac{10\times9\times8}{7\times6\times5\times4}$.

3) $n(n-1)(2n+2)$.

Exercice 13 (**)
Simplifier en utilisant la notation factorielle

1) $(2n)\times(2n-2)\times(2n-4)\times\cdots\times2$.

2) $(2n-1)\times(2n-3)\times(2n-5)\times\cdots\times1$.

Exercice 14 (***)
On définit la suite (u_n) par $(u_0,u_1)\in\mathbf{R}^2$ et

$$\forall n\in\mathbf{N},\ u_{n+2}=-2(n+1)u_n.$$

Exprimer simplement u_n en fonction de n et sans utiliser le signe $\prod$.

Coefficients binomiaux

Exercice 15 (*)
Calculer les expressions suivantes :

1) $\dbinom{10}{9}$ 2) $\dbinom{8}{2}$ 3) $\dbinom{21}{21}$ 4) $\dbinom{50}{48}$

Exercice 16 (*)
Pour $(x,y)\in\mathbf{C}^2$, développer *rapidement* à l'aide du triangle de Pascal.

1) $(1+x)^5$. 2) $(1-x)^6$. 3) $(x-y)^4$.

Exercice 17 (*)
Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{3^k}$.

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k+1}$.

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}3^{k-1}$.

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}3^{2k-1}$.

5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{3^{k-1}}{2^{2k}}$.

6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\frac{2^n(-1)^{k(k+1)}}{3^{2k}}$.

7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}}$.

Exercice 18 (*)
Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$. 3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}\binom{n}{k}$.

Exercice 19 (**)
Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{1+k}\binom{n}{k}.$$

Exercice 20 (*)
Calculer la double somme :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{n-i}{n-j}\binom{n}{i}.$$

Exercice 21 (**) (Formule de la gouttière)
Pour tout $(n,p) \in \mathbf{N}^2$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 22 (***)
Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer les sommes :

$$S_1 = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}.$$

Exercice 23 (***)
Soit $n \in \mathbf{N}$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}.$$

Inégalités

Exercice 24 (*)
Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Exercice 25 (***)

1) Montrer que $\forall x > 0,\ x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.
2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un famille de $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) \geqslant n^2.$$

3) Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 26 (***)
Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$.
On pose

$$S_n = \prod_{k=1}^{n} x_k \quad \text{et} \quad T_n = \prod_{k=1}^{n}(1-x_k).$$

Montrer que $S_n \leqslant 2^{-n}$ ou $T_n \leqslant 2^{-n}$.

III Logique et raisonnement

Pour commencer...

Exercice 1 (*)
Soit f une application définie sur $\mathbf{R}$.
Dire pour chaque situation si les deux assertions ont la même signification ou non. Expliquer.

1) « $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x)=0$ » et « $\forall z \in \mathbf{R},\ f(z)=0$ ».
2) « $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x)=0$ » et « $\exists x \in \mathbf{R},\ f(x)=0$ ».
3) « Les éléments sont non tous nuls » et « les éléments sont tous non nuls ».

Exercice 2 (*)
Donner la valeur de vérité des assertions

1) « $\frac{1}{x} \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 0$ ».
2) « $x \geqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \geqslant 0$ ».
3) « $x \mapsto \cos x$ est croissante sur $\mathbf{R} \iff \mathbf{Z}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{N}$ ».
4) « (u_n) n'est pas croissante $\Rightarrow (u_n)$ est décroissante ».
5) « $\big(\forall x \in \mathbf{R}, \exists \lambda \in \mathbf{R},$ tel que $f(x)=\lambda x\big) \iff f$ est une fonction linéaire ».

Exercice 3 (*)
Compléter avec $\Rightarrow$, $\iff$ ou $\Leftarrow$.

$ABCD$ est un carré	$ABCD$ est un parallélogramme
a>1	$\frac{1}{a}<1$
$AB=AC$	ABC est isocèle
$\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, y<x$	$\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, y<x$
$\ln a = b$	$a=\mathrm{e}^b$
$x>2$	$x^2>4$
A, B alignés et B, C alignés	A, B, C alignés.
$x>0$	$-x \leqslant 0$
f est continue	f est dérivable.

Exercice 4 (*)

1) Quelle est la contraposée de :
« si un nombre est divisible par 6, alors il est pair » ?
2) Quelle est la réciproque du théorème :
« Si un nombre entier est multiple de 10 alors son chiffre des unités est 0 ».
3) Quelle est la contraposée du théorème :
« Si un nombre entier est multiple de 10 alors son chiffre des unités est 0 ».

Lecture des quantificateurs

Exercice 5 (**)
Ces propositions sont-elles vraies ?

1) $\forall \varepsilon>0,\ \exists a \in \mathbf{R}_+^*,\ a<\varepsilon$.
2) $\forall a \in \mathbf{R},\ \mathrm{e}^a>0 \Rightarrow a>0$.
3) $\forall a \in \mathbf{R},\ a>0 \Rightarrow \mathrm{e}^a>0$.
4) $\forall a \in \mathbf{R},\ \mathrm{e}^a<0 \Rightarrow a<0$.
5) Si f est une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, alors $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R},\ f(x)=y$.
6) Si f est une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, alors $\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R},\ f(x)=y$.
7) Si f est une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, alors $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R},\ f(x)=y$.
8) Si f est une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, alors $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ f(x)=y$.

Exercice 6 (**)
Existe-t-il une fonction f sur $\mathbf{R}$, vérifiant

$$\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ f(y)>f(x).$$

Exercice 7 (**)
Donner la signification des propositions :

1) $\forall x \in \mathbf{R}, \exists M \in \mathbf{R},\ f(x) \leqslant M$.
2) $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$.
3) $\forall A \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N},\ u_n>A$.
4) $\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n| \leqslant \varepsilon$.

Écriture avec les quantificateurs

Exercice 8 (*)
Écrire les propositions suivantes avec des quantificateurs :

1) La fonction f est majorée sur $\mathbf{R}$.
2) La fonction f n'est pas majorée sur $\mathbf{R}$.
3) La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$.
4) La fonction f s'annule sur $\mathbf{R}$.
5) La fonction f est nulle sur $\mathbf{R}$.
6) La fonction f s'annule une unique fois sur $\mathbf{R}$.

Exercice 9 (*)
Écrire les propositions suivantes avec des quantificateurs :

1) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres,
2) Entre deux nombres rationnels distincts, il existe toujours un nombre irrationnel.
3) Étant donnés trois réels, il en existe au moins deux de même signe.
4) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
5) La fonction f est supérieure ou égale à la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}$.

Négation

Exercice 10 (**)
Donner la négation (avec les quantificateurs) des propositions de l'exercice 7.

Exercice 11 (**)
Donner la négation des assertions :

1) $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ f(x) > y$.
2) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ x > y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
3) $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ x > y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
4) $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R},\ x > y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.

Construire un raisonnement

Exercice 12 (**)
Montrer que

1) Pour $n \in \mathbf{N}$, si n^2 est impair, alors n est impair.
2) Pour $a \in \mathbf{R}$, si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $\frac{a}{2}$ n'est pas un entier pair.
3) Pour $a \in \mathbf{R}$, si $\forall \varepsilon > 0,\ a \leqslant \varepsilon$ alors $a \leqslant 0$.

Exercice 13 (*)
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 14 (**)
a et b désignent deux nombres réels.

1) Montrer que si $a + b > 1$, alors $a > \frac{1}{2}$ ou $b > \frac{1}{2}$.
2) Est-il vrai que si $ab > 1$, alors $a > 1$ ou $b > 1$?

Exercice 15 (**)
Trouver toutes les fonctions f qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \exists \lambda \in \mathbf{R},\ \text{ tel que } f(x) = \lambda x.$$

Exercice 16 (**)
Soit $n \in \mathbf{N}$, démontrer que $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11.

Exercice 17 (**)
Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f\,(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Donner son expression.

Pour s'entraîner

Exercice 18 (*)
Montrer que :
$$\forall x \in \mathbf{R},\ |x-2| < x^2 - 2x + 3.$$

Exercice 19 (**)
Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $(a_1, \cdots, a_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$ et $M \in \mathbf{R}$.
Montrer que
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n > M \quad \Rightarrow \quad \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} > \frac{M}{n}.$$

Soigner la rédaction.

Exercice 20 (**)
Trouver toutes les fonctions $f\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que
$$\forall (x,\, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Exercice 21 (**)
Trouver l'ensemble des fonctions $f\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $\forall (x,\, y,\, z) \in \mathbf{R}^3$, on ait
$$\left(f(x) - f(y)\right)(x - z) = \left(f(x) - f(z)\right)(x - y).$$

Exercice 22 (**)
Au jeu des allumettes, deux joueurs disposent en commun de 100 allumettes.
Chacun à son tour enlève au choix de 1 à 7 allumettes.
Le joueur qui retire la dernière allumette gagne.

1) Montrer que le premier joueur peut être certain de gagner avec la bonne stratégie.
2) Généraliser ce résultat à un nombre n quelconque d'allumettes avec la possibilité de retirer k allumettes.

Exercice 23 (**)
On définit le logarithme décimal de x : $\log(x)$ comme l'unique y tel que $10^y = x$. Montrer que $\log 2 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Exercice 24 (***)
Existe-t-il une fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que
$$\forall (x,y) \in \mathbf{N}^2,\ \left(f(x)^{f(y)}\right) = y^x.$$

Exercice 25 (***)
Déterminer l'ensemble des fonctions $f\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que
$$\forall (x,\, y) \in \mathbf{R}^2,\ |f(x) - f(y)| = |x - y|\,.$$

Indication : on pourra poser $g = f - f(0)$.

Exercice 26 (**)

1) Démontrer que si on range $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.
2) On considère 3 nombres pris dans l'intervalle $]0,\, 1]$. Montrer qu'il en existe au moins 2 notés a, b tels que $|b - a| < \frac{1}{2}$.
3) On considère un carré de côté 1 contenant 51 points.
Montrer qu'il existe au moins 3 points situés à une distance inférieure à $\frac{2}{7}$.

Exercice 27 (* *)**
On considère une suite (u_n) sous-additive, c'est-à-dire telle que
$$\forall (i,j) \in (\mathbf{N}^*)^2\,, \quad u_{i+j} \leqslant u_i + u_j.$$

1) Montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}.$$
2) Trouver une suite sous-additive qui vérifie le cas d'égalité :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}.$$
3) En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}^*$,
$$\sqrt{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 28 (* *)**
Montrer qu'il existe une unique application $f\ :\ \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad f(n+1) > f\left(f(n)\right).$$

Indication en note de bas de page [1]

[1] Pour une fonction f solution, on pourra commencer par chercher l'ensemble des k tels que $f(k) = \min\{f(n),\ n \in \mathbf{N}\}$. Ce n'est que la première étape du raisonnement.

IV Trigonométrie

Calculs simples

Exercice 1 (*)
Calculer :

1) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{25\pi}{6}\right)$.

2) $\sin\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$, $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)$.

3) $\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$, $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

Exercice 2 (*)
Déterminer θ

1) $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$, $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\theta) = -\frac{1}{2}$.

3) $\tan(\theta) = 1$, $\tan(\theta) = -\sqrt{3}$.

Exercice 3 (**)
Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Équations trigonométriques

Exercice 4 (*)

1) Pour $c \in [-1,1]$, donner l'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = c$.

2) Pour $s \in [-1,1]$, donner l'ensemble des solutions de l'équation $\sin x = s$.

3) Pour $t \in \mathbf{R}$, donner l'ensemble des solutions de l'équation $\tan x = t$.

Exercice 5 (*)

1) Pour $c \in [-1,1]$, donner l'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = c$.

2) Pour $s \in [-1,1]$, donner l'ensemble des solutions de l'équation $\sin x = s$.

3) Pour $t \in \mathbf{R}$, donner l'ensemble des solutions de l'équation $\tan x = t$.

Exercice 6 (*)
Résoudre les inéquations

1) $\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

2) $\sin^2(2x) > \frac{1}{2}$.

3) $\cos^2(x) \geqslant \cos(2x)$.

Exercice 7 (**)
Résoudre les équations

1) $\sin^2 x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos x = 2$.

2) $\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

3) $2\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$.

4) $2\cos^2 x - (\sqrt{3} + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{\frac{3}{2}} = 0$.

5) $3\cos(5x) = \cos(2x) + \cos(12x)$.

6) $\sin(3x) = \cos(x)$.

Exercice 8 (**)
Résoudre les équations : 1) $\cos x + \sin x = 0$. 2) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$.

Exercice 9 (**)
Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

Fonctions circulaires réciproques

Exercice 10 (*)
Simplifier l'expression : $\sin(2\mathrm{Arctan}\,(x))$.

Exercice 11 (**)
Simplifier les expressions : 1) $\sin(3\mathrm{Arctan}\,(x))$. 2) $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

Exercice 12 (***)
Simplifier l'expression : $\mathrm{Arctan}\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)$.

Exercice 13 (***)
Soit $x \in \mathbf{R}$, résoudre les équations

1) $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin} \frac{4}{5} + \operatorname{Arcsin} \frac{5}{13}$.

2) $2\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

3) $\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{9}{10}\right) + \operatorname{Arccos}\left(-\frac{4}{5}\right)$.

V Ensembles

Ensembles explicites

Exercice 1 (*)
Déterminer $E = \{x > 0,\ \forall y > 0, x < y\}$.

Exercice 2 (*)
Lister les ensembles

1) $\left\{x^2,\ x \in \{-1, 0, 1\}\right\}$.
2) $\left\{(x, y) \in [\![1, 3]\!]^2\right\}$.
3) $\{(x, y) \in [\![1, 3]\!] \times [\![-1, 1]\!]\}$.
4) $\{(x, y) \in [\![1, 3]\!] \times \{-1\,,\,1\}\}$.
5) $[\![1, 3]\!]^2$.
6) $\{-1, 0\}^3$.

Exercice 3 (*)
Déterminer les ensembles suivants :

1) $\left\{x \in \mathbf{R},\ x = \sqrt{x^2}\right\}$.
2) $\{x \in \mathbf{R},\ \sqrt{x} < 0\}$.
3) $\left\{x \in \mathbf{R},\ (x+1)^2 < x\right\}$.
4) $\left\{x \in \mathbf{R},\ \mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}^x + 1\right\}$.
5) $\left\{x \in \mathbf{R},\ x^2 < 2^2\right\}$.
6) $\left\{x \in \mathbf{R},\ -x^2 < -2\right\}$.

Exercice 4 (**)
Représenter graphiquement $\left\{(x,\,y) \in \mathbf{R}^2,\ y \geqslant x \Rightarrow y^2 \geqslant x^2\right\}$.

Exercice 5 (*)
On définit les ensembles

$$K = [2, 5] \times [-1, 4] \quad \text{et} \quad D = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y \leqslant x\right\}.$$

1) Représenter dans le plan
   (a) le domaine correspondant aux points $M(x, y)$ pour $(x, y) \in K$.
   (b) le domaine correspondant aux points $M(x, y)$ pour $(x, y) \in D$.
2) L'implication suivante est-elle vraie ?
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (x, y) \in K \Rightarrow (x+1, y-1) \in D.$$
3) La réciproque est-elle vraie ?
4) Montrer que $K \cap D \neq \emptyset$.

Exercice 6 (**)
Pour tout $m \in \mathbf{R}$, on définit la droite $\mathscr{D}_m$ par l'équation

$$\mathscr{D}_m\ :\ 12mx - 9y = 3m + 6.$$

Montrer que $\displaystyle\bigcap_{m \in \mathbf{R}} \mathscr{D}_m$ est un singleton.

Exercice 7 (**)

1) Pour tout $n \in \mathbf{N}\backslash\{0; 1\}$, on considère l'intervalle de $\mathbf{R}$, $\quad I_n = \left[\frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}\right]$.
   Déterminer une expression plus simple de l'ensemble $J = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbf{N}\backslash\{0;1\}} I_n$.
2) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on considère l'intervalle de $\mathbf{R}$, $\quad \widetilde{I_n} = \left]1 - \frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}\right[$.
   Déterminer une expression plus simple de l'ensemble $K = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \widetilde{I_n}$.

Exercices abstraits

Exercice 8 (*)

1) Donner un exemple d'une intersection d'ensembles non vides, qui est vide.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'union de deux ensembles soit vide.

Exercice 9 (*)
Décrire en extension les ensembles $\mathcal{P}(\{x\})$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x\}))$.

Exercice 10 (**)

1) Soient deux ensembles A et B, écrire
   $A \setminus B$ à partir des opérations ensemblistes usuelles : $\cap$, $\cup$, $\overline{\cdot}$.
2) Prouver que $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$.

Exercice 11 (**)
Soit un ensemble E, on définit une relation de division sur les parties de E par A div $B = A \cup \overline{B}$.
Calculer :

1) A div $(B \cap A)$.
2) A div $(B \cup A)$.
3) $A \cup (B$ div $A)$.
4) $A \cap (B$ div $A)$.

Exercice 12 (**)
Soient A et B deux parties de E, on définit la différence symétrique de A et B par

$$A \Delta B = \left(A \cap \bar{B}\right) \cup \left(B \cap \bar{A}\right),$$

en notant $\bar{B} = \complement_E B$ et $\bar{A} = \complement_E A$.

1) Expliquer ce que représente la différence symétrique.

2) Donner $E \Delta \emptyset$, $A \Delta E$, $E \Delta E$.

3) Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Exercice 13 (***)
A et B sont deux parties non vides de E.
Montrer que

$$\left(\forall X \subset E,\ \forall Y \subset E, \begin{cases} A \cap X = A \cap Y \\ B \cap X = B \cap Y \end{cases} \Rightarrow X = Y\right) \iff A \cup B = E.$$

VI Les nombres réels

Résolution d'équations et inéquations

D'autres exercices sur les inégalités se trouvent dans la partie soutien du site, ne pas hésiter à s'y référer.

Exercice 1 (*)
Résoudre et représenter graphiquement les solutions des inégalités suivantes :

1) $(x-2)(x-1) < 0$.
2) $\dfrac{x+3}{x-5} < 0$.
3) $\dfrac{x+3}{x-5} < 1$.
4) $x < \dfrac{1}{x}$.

Exercice 2 (*)
Résoudre les inégalités suivantes :

1) $-x^3 + 2x^2 \geqslant 0$.
2) $2x^2 - 4x - 6 \geqslant 0$.
3) $x^3 + 5x^2 + 8x + 6 < 2$.
4) $x^3 + x^2 - 5x - 5 \leqslant 0$.

Exercice 3 (*)
Résoudre les inégalités suivantes :

1) $|x-5| < 2$.
2) $|x+1| > 3$.
3) $\dfrac{1+x}{1-x} < |x-1|$.

Exercice 4 (**)
Résoudre les égalités suivantes :

1) $x|x| = 3x + 2$.
2) $|x+2| + |3x-1| = 4$.
3) $|x^2 + x - 3| = |x|$.
4) $x + |x| = \dfrac{2}{x}$.

Exercice 5 (*)

1) Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
2) En déduire que pour tout $x > 0$,
$$0 \leqslant \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}.$$

Exercice 6 (**)
Résoudre les égalités suivantes :

1) $\ln((x+2)(x-1)) = \ln 2$.
2) $x + \sqrt{2x+1} = 1$.

Relations binaires

Exercice 7 (*)
Donner la liste de

1) toutes les relations d'équivalence sur $E = \{1, 2, 3\}$.
2) toutes les relations d'ordre sur $E = \{1, 2\}$.

Exercice 8 (**) (lecture du cours)
Répondre en justifiant.

1) Une relation binaire peut-elle être à la fois symétrique et antisymétrique ?
2) Une relation binaire peut-elle n'être ni symétrique, ni antisymétrique ?
3) Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$.
Peut-il exister une suite d'éléments $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux à deux distincts de E formant une boucle d'inégalités :
$$x_1 \preccurlyeq x_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq x_n \preccurlyeq x_1\,?$$
4) Soit E un ensemble non vide muni d'une relation $\prec$ antisymétrique et transitive.
Est-ce nécessairement une relation d'ordre stricte ?
Dans ce cas, y-a-t-il unicité de la relation d'ordre « large » qui lui est associée ?
5) On considère une partition d'un ensemble non vide E.
Montrer qu'il existe une relation d'équivalence sur E telle que cette partition correspondent aux classes d'équivalence de cette partition.
6) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une relation d'équivalence sur E soit totale.

Exercice 9 (*)
On note $E = \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ et on munit E de la relation binaire définie par
$$\forall((a, b), (c, d)) \in E^2,\ (a, b)\mathscr{R}(c, d) \iff ad = bc.$$

1) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
2) Décrire la classe d'équivalence de $(a, b) \in E$.

Exercice 10 (*)
On définit la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall (A,\, B) \in (\mathcal{P}(E))^2\,,\; A \mathscr{R} B \iff A = B \text{ ou } A = \overline{B}.$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 11 (**)
On définit la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall (x,\, y) \in \mathbf{R}^2,\; x \mathscr{R} y \iff x\,\mathrm{e}^y = y\,\mathrm{e}^x.$$

1) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Pour $x \in \mathbf{R}$, déterminer le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathscr{R}$.

Exercice 12 (**)
Étudier la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall (x,\, y) \in \mathbf{R}^2,\; x \mathscr{R} y \iff \exists n \in \mathbf{N}^*,\; y = x^n.$$

Majorants-minorants

Exercice 13 (*)

1) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est-elle majorée sur $\mathbf{R}_+^*$, est-elle minorée sur ce même intervalle ?

2) Donner sa borne inférieure en justifiant. Est-ce un minimum ?

Exercice 14 (*)

$$E = \{1 - (-1)^n,\; n \in \mathbf{N}\}\,.$$

1) L'ensemble est-il majoré ? minoré ?

2) S'il est majoré, donner sa borne supérieure, est-ce un maximum ?

3) S'il est minoré, donner sa borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 15 (*)

$$E = \left\{ \frac{2n-1}{n},\; n \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

1) L'ensemble est-il majoré ? minoré ?

2) S'il est majoré, donner sa borne supérieure, est-ce un maximum ?

3) S'il est minoré, donner sa borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 16 (*)
On considère les fonctions a et b définies sur $\mathbf{R}$ par:

$$a(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \geqslant 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad b(x) = \begin{cases} 1 + 1/x & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{(-x)} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

1) Les fonctions sont-elles majorées ? minorées ?

2) Si elles sont majorées, donner leur borne supérieure, est-ce un maximum ?

3) Si elles sont minorées, donner leur borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 17 (**)
On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\; 3u_{n+1} + 2u_n + 1 = 0.$$

Déterminer si la suite est majorée, minorée.
Déterminer, en cas d'existence $\sup\{u_n,\; n \in \mathbf{N}\}$ et $\inf\{u_n,\; n \in \mathbf{N}\}$.

Exercice 18 (***)
Soient A et B deux parties non vides minorées de $\mathbf{R}$.
Montrer que $A \cup B$ admet une borne inférieure et l'exprimer en fonction de $\inf(A)$, $\inf(B)$.

Exercice 19 (***)
Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbf{R}$, non disjointes.

1) Montrer que $\sup A \cap B \leqslant \min(\sup A, \sup B)$.

2) A-t-on l'égalité dans le cas général ?

3) Qu'en est-il si A et B sont des intervalles ?

Exercice 20 (***)
Soient f et g deux fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bornées.

1) Montrer que $|f|$ et $|g|$ sont est majorées sur $\mathbf{R}$.

2) Montrer que $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} (|f(x) + g(x)|) \leqslant \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} (|f(x)|) + \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} (|g(x)|)$.

3) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} (|\lambda f(x)|) = |\lambda| \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} (|f(x)|)$.

Partie entière

Exercice 21 (**)
Démontrer que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Exercice 22 (**)
Démontrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$0 \leqslant \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leqslant n-1.$$

Exercice 23 (**)
Démontrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\left\lfloor \dfrac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 24 (*)
Résoudre l'équation $\left\lfloor \frac{x}{1-3x} \right\rfloor = 2$.

Exercice 25 (**)
Résoudre sur $\mathbf{R}$

$$\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor .$$

Exercice 26 (**)
Soit a un réel fixé.

1) Montrer que pour tous réels x, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

2) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\left\lfloor \dfrac{a+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{a}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{a}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

3) En déduire, pour tout entier n, une expression simplifiée de $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \dfrac{a+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

Inégalités plus sophistiquées

Exercice 27 (*)
Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\min(x,y) = \frac{(x+y) - |x-y|}{2} \qquad \text{et} \qquad \max(x,y) = \frac{(x+y)+|x-y|}{2}.$$

Exercice 28 (**)

1) Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'inéquation suivante : $x^2 - x - 1 \geqslant 0$.

2) Résoudre dans $\mathbf{R}$, la chaîne d'inéquations suivantes :

$$1 + x - x^2 \leqslant x^2 - 3x + 1 \leqslant x^2 - x - 1.$$

3) Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'inéquation :

$$|x^2 - 3x + 1| \leqslant x^2 - x - 1.$$

Exercice 29 (**)
Soit $n \geqslant 1$.
On considère $(a_i)_{i \in [\![1,\, n]\!]} \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, et on se propose de comparer leurs moyennes harmonique H, géométrique G et arithmétique A.
Elles sont définies par

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}, \quad G = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

1) Montrer que pour $n \in \{1,\, 2\}$,
$$G \leqslant A.$$

2) En déduire que pour tout n puissance de 2, $G \leqslant A$.

3) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $n \leqslant 2^p$.
On complète la famille $(a_1, \cdots, a_n)$ par la valeur A autant de fois que nécessaire pour obtenir un 2^p−uplet.
Montrer que cela permet de prouver que $G \leqslant A$ au rang n.

4) Prouver que $H \leqslant G$.

Exercice 30 (**)
On définit f sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f : x \mapsto \sup_{n\in\mathbf{N}} \frac{x^n}{n!}.$$

Montrer que f est bien définie sur $\mathbf{R}_+$ et donner son expression sans utiliser les bornes supérieures (ou inférieures).

Exercice 31 (**)

1) (*) Montrer que $\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.
Retenir cette inégalité et la méthode.

2) En déduire que $\forall (a,b,c) \in [0,1]^3$,

$$\min\big(a(1-b), b(1-c), c(1-a)\big) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Exercice 32 (**)

1) Soient $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, montrer que $(x+y)^2 \geqslant 4xy$.

2) En déduire que

$$\forall (a,b,c) \in (\mathbf{R}_+)^3,\ (a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

3) En déduire que

$$\forall (a,b,c) \in (\mathbf{R}_+^*)^3,\ (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9$$

Exercice 33 (***)
Montrer que pour tout $n \geqslant 3$,

$$\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!}.$$

Densité

Exercice 34
On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ 4u_{n+1} = u_n - 1$$

Donner la borne supérieure et la borne inférieure de la suite.

Exercice 35 (**)
Démontrer que $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{Z}$,

$$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

Approfondissement

Exercice 36 (**)
Démontrer que $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{Z}$,

$$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

Exercice 37 (***)
On note E l'ensemble des parties non vides majorées de $\mathbf{R}$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} (E, \subset) & \to & (\mathbf{R}, \leqslant) \\ A & \mapsto & \sup A. \end{array} \right.$$

1) Montrer que f est une fonction croissante pour les relations d'ordre choisies.

2) Montrer qu'elle n'est pas strictement croissante.

VII Les nombres complexes

Écriture des nombres complexes

Exercice 1 (*)
Donner la forme algébriques des expressions suivantes

1) Pour $x \in \mathbf{R}$, $(1+ix)(1-ix)$.
2) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$.
3) $\dfrac{1}{1+i\frac{\sqrt{3}}{3}}$.
4) $\dfrac{(2-i)(5+2i)}{3-4i}$.
5) $(1+i)^{2021}$.
6) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $(1+\cos\theta + i\sin\theta)^n$.

Exercice 2 (*)
Donner la forme exponentielle des expressions suivantes.

1) $\sin x + i\cos x$ pour $x \in \mathbf{R}$.
2) $\dfrac{\mathrm{e}^{ix}-1}{\mathrm{e}^{ix}+1}$ pour $x \in]-\pi,\pi[$.
3) $-2i\,\mathrm{e}^{ix}$ pour $x \in \mathbf{R}$.
4) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1+i)^3}$.
5) $(1+i)^{2020}-(1-i)^{2020}$.

Exercice 3 (**)
Mettre sous forme polaire ($\alpha \in \mathbf{R}$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$).
⚠ le module est un réel positif.

1) $1-i\tan\alpha \quad \left(\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$.
2) $1-\mathrm{e}^{-i\alpha}$.
3) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{iy}}$.
4) $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{1+i}\right)^{2020}$.
5) (***) $\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Exercice 4 (*)

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} i^k$.

Interprétation géométrique

Exercice 5 (*)
Interpréter géométriquement les expressions suivantes

1) $|z| \leqslant 1$.
2) $|z-i| < 2$.
3) $|2z+i-1| > 1$.
4) $\mathfrak{Re}\,(z) \geqslant -1$.
5) $\mathfrak{Im}\,(z) < 0$.
6) $0 \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{\pi}{6}$.
7) $0 \leqslant \arg(\frac{z}{1-i}) \leqslant \frac{\pi}{4}$.
8) $|z-i| = |z+1|$.

Exercice 6
On note $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Déterminer les points M d'affixe z tels que les points d'affixe j, z, jz soient alignés.

Exercice 7 (*)
Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant ces conditions et interpréter géométriquement les solutions.

1) $\dfrac{z}{z-i} \in \mathbf{R}$.
2) $z^3 \in \mathbf{R}$.
3) $\dfrac{1-iz}{1+iz} \in \mathbf{R}$.

Exercice 8 (*)
Montrer que $\forall (z,z') \in \mathbf{C}^2$

$$2\left(|z|^2+|z'|^2\right) = |z+z'|^2+|z-z'|^2.$$

Interpréter géométriquement.

Exercice 9 (***) (Autour du nombre j)
On pose $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.
On considère trois points du plan complexe A, B, C, d'affixes respectives a, b, c.

1) Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct si, et seulement si

$$a + jb + j^2c = 0.$$

2) En déduire que ABC est équilatéral si, et seulement si

$$a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc) = 0.$$

Résolution d'équations

Exercice 10 (*)

1) Donner les racines carrées de i et $1+i$.
2) Donner les racines cubiques de $-1+i$.
3) Donner les racines 4^{e} de $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$.

Exercice 11 (*)
Trouver deux nombres complexes dont la somme est -1 et le produit est 1. Sont-ce les seuls ?

Exercice 12 (*)
Pour quelles valeurs de $n \in \mathbf{N}$, $(1+i)^n$ est-il réel ?

Exercice 13 (*)
Résoudre sur $\mathbf{C}$, les équations :

1) $|\overline{z}+1-i|=4$. 2) $2z+6\overline{z}=3+2i$. 3) $z^2=|z|$.

Exercice 14 (*)
Résoudre sur $\mathbf{C}$, les équations :

1) $z^2+z+1=0$.
2) $z^2+2z+4=0$.
3) $z^2+3\sqrt{3}z+9=0$.
4) $z^2+2z-\sqrt{2}=0$.
5) $z^3+z^2+z=0$.

Exercice 15 (**)
Résoudre sur $\mathbf{C}$, les équations :

1) $z^2-(1+i\sqrt{3})z-1+i\sqrt{3}=0$.
2) $z^2-2(2+i)z+6+8i=0$.
3) $z^3+(i-1)z^2-(i-2)z=2$.
4) $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$.

Exercice 16 (*)
Résoudre sur $\mathbf{C}$, les équations :

1) $\mathrm{e}^z=5+5i$. 2) $\mathrm{e}^{2z}=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$.

Exercice 17 (*)
Trouver tous les couples $(u,v)\in\mathbf{C}^2$ solution du système

$$\begin{cases} u+v &= i-1 \\ uv &= -5i \end{cases}.$$

Exercice 18 (**)
Trouver tous les couples $(u,v)\in\mathbf{C}^2$ solution du système

$$\begin{cases} u^2+v^2 &= 0 \\ uv &= 1 \end{cases}.$$

Exercice 19 (***)
Trouver l'ensemble des $z\in\mathbf{C}$ tels que

$$\overline{z}(z-1)=z^2(\overline{z-1}).$$

Exercice 20 (***)
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(A,B,C)\in\mathbf{C}^3$ pour que

$$\forall z\in\mathbf{U},\quad Az+B\overline{z}+C=0.$$

Trigonométrie

Exercice 21 (*)
Linéariser

1) $\cos^4 x\sin x$.
2) $\sin^2 x\cos^3 x$.
3) $\cos^4 x\sin^3 x$.

Exercice 22 (**)
Résoudre $\sin\,x+\sin\,2x+\sin\,3x=0$.

Exercice 23 (***)
Calculer $\sin(5a)$ en fonction de $\sin a$ et de ses différentes puissances.
En déduire la valeur de $\sin(\frac{\pi}{5})$.

Sommes et produits

Exercice 24 (*) (autour des racines n-ièmes)
Pour $n \geqslant 2$, on note $\mathbf{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
On note $P = X^n - 1$.
À l'aide de P, montrer que $\prod_{z \in \mathbf{U}_n} z = (-1)^{n-1}$ et $\sum_{z \in \mathbf{U}_n} z = 0$.

Exercice 25 (*)
Soit $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$, on considère $z = \rho\, \mathrm{e}^{i\theta}$.
Exprimer simplement en fonction de ρ, θ et des $\cos(k\theta)$ pour $k \in [\![1,\, n]\!]$ le produit

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(z^k + \overline{z}^k\right).$$

(il reste un produit dans le résultat).

Exercice 26 (*)
Soient $\theta \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, Donner une expression, sans le signe $\sum$, de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta).$$

Exercice 27 (***)
Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer les sommes :

$$T_1 = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k} \qquad \text{et} \qquad T_2 = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}.$$

Exercice 28 (***)
Calculer, pour $n \geqslant 3$, les trois sommes

$$A = \sum_{0 \leqslant 3k \leqslant n} \binom{n}{3k}, \qquad B = \sum_{0 \leqslant 3k+1 \leqslant n} \binom{n}{3k+1}, \qquad C = \sum_{0 \leqslant 3k+2 \leqslant n} \binom{n}{3k+2}.$$

Transformations géométriques

Exercice 29 (*)
Décrire les transformations géométriques associées aux applications suivantes ($\theta \in \mathbf{R}$).

1) $f_1 : z \mapsto (1-i)z + i$.
2) $f_2 : z \mapsto \mathrm{e}^{i\theta}(z - 2i + 3)$.

Exercice 30 (*)

1) Déterminer l'expression complexe de la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centre $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.
2) Déterminer l'expression complexe de la symétrie centrale de centre $1 + i$.

Exercice 31 (***)
Déterminer l'expression complexe de la symétrie axiale d'axe $y = 2x$.

Exercice 32 (***)
Décrire la transformation géométrique associée à l'application suivante

$$f_1 : z \mapsto (1 - \overline{z}).$$

Exercice 33 (* *)**
Déterminer les droites du plan complexe qui ont pour image une (portion de) droite par l'application exponentielle.
Indication : faire des schémas.

Exercices CCINP

Exercice 34 (CCINP 84)

1) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3) En déduire, pour $n \in \mathbf{N}^*$, les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 35 (CCINP 89)
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = \mathrm{e}^{i\,\frac{2\pi}{n}}$.

1) On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2) On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

VIII Applications

Pour commencer

Exercice 1 (*)
Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes.
Lorsque les applications sont bijectives, déterminer leur réciproque.

1) $f_1 : \begin{cases} \mathbf{Z} & \to \mathbf{Z} \\ n & \mapsto -n. \end{cases}$

2) $f_2 : \begin{cases} \mathbf{R} & \to [0,1] \\ x & \mapsto |\sin x|. \end{cases}$

3) $f_3 : \begin{cases} \mathbf{N} & \to \mathbf{N} \\ n & \mapsto 2n. \end{cases}$

4) $f_4 : \begin{cases} \mathbf{N} & \to \{-1,1\} \\ n & \mapsto (-1)^n. \end{cases}$

5) $f_5 : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x, x+y, x-y). \end{cases}$

6) $f_6 : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (2x+3y, x+2y). \end{cases}$

7) $f_7 : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{C} \\ (x,y) & \mapsto x+iy. \end{cases}$

8) $f_8 : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{C} \\ (x,y) & \mapsto x\,e^{iy}. \end{cases}$

9) $f_9 : \begin{cases} \mathbf{C} & \to \mathbf{C} \\ z & \mapsto e^z. \end{cases}$

Lecture graphique

Exercice 2 (*)
Déterminer (par lecture graphique)
$\sin\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\right)$, et $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\right)$.

Exercice 3 (*)
Déterminer (par lecture graphique)

1) $\exp^{-1}([0,1])$,
2) $\exp^{-1}(]0,1])$,
3) $\exp^{-1}(]1,+\infty[)$,
4) $\exp\left(\exp^{-1}([-1,1[)\right)$.

Exercice 4 (*)
Représenter graphiquement les fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

$$a : x \mapsto \begin{cases} 2-x & \text{si } x \geqslant 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad b : x \mapsto \begin{cases} 1+1/x & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{(-x)} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Répondre aux questions suivantes en lisant sur les graphes des fonctions concernées :

1) Donner $a\,(]-\infty,0])$, $a\,([0,+\infty[)$, $a^{-1}([0,9])$ et $a^{-1}(]-\infty,\,0])$.

2) Donner $b\,(]0,2])$, $b\,([1,+\infty[)$, $b^{-1}([1/2,+\infty[)$.

3) $a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est-elle surjective ? injective ?
Déterminer deux intervalles I et J de $\mathbf{R}$ tels que $a : I \to J$ soit bijective.

4) $b : \mathbf{R} \to [0,+\infty[$ est-elle surjective ? injective ?
Déterminer deux intervalles $I \subset \mathbf{R}$ et $J \subset [0,+\infty[$ tels que $b : I \to J$ soit bijective.

D'autres exercices concrets seront donnés avec les fonctions usuelles.

Exercices abstraits

Exercice 5 (*)
Soient E et F deux ensembles non vides et f une injection de E dans F.
Montrer que f induit une bijection de E dans $f(E)$.

Exercice 6 (**) (à connaître)
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1) Si $g \circ f$ est injective,
   (a) montrer que f est injective,
   (b) montrer à l'aide d'un contre-exemple que g n'est pas nécessairement injective.
   (c) on suppose de plus f surjective.
   A-t-on nécessairement g injective ?

2) Si $g \circ f$ est surjective,
   (a) montrer que g est surjective,
   (b) montrer à l'aide d'un contre-exemple que f n'est pas nécessairement surjective.

Exercice 7 (*)
Soit $f : E \to E$. On suppose que $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}$.
Montrer que f est bijective.

Exercice 8 (*)
Soit $f : E \to E$. On suppose que $f \circ f \circ f$ bijective.
Montrer que f est bijective.

Exercice 9 (**)
Soit E un ensemble et $p\ : E \to E$ une application telle que $p \circ p = p$.
Montrer les équivalences suivantes

$$p \text{ injective} \iff p \text{ surjective} \iff p = \mathrm{Id}_E.$$

Exercice 10 (**)
Soit $f : E \to F$, montrer que

1) $A \subset f^{-1}(f(A))$ pour toute partie A de E.
2) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ pour toute partie B de F.
3) f injective $\Rightarrow A = f^{-1}(f(A))$ pour toute partie A de E.
4) f surjective $\Rightarrow B = f(f^{-1}(B))$ pour toute partie B de F.

Exercice 11 (***)
Soient E et F deux ensembles non vides. Montrer l'équivalence entre les deux assertions :

1) Il existe une injection de E dans F.
2) Il existe une surjection de F sur E.

Applications et ensembles

Exercice 12 (***)
Soit E et F deux ensembles, et $A \subsetneq E$.
On suppose que A est strictement inclus dans E et non vide, et que F admet au moins deux éléments.
On définit l'application f par

$$f\ :\left\{\begin{array}{ccc} F^E & \to & \mathcal{P}(F) \\ \varphi & \mapsto & \varphi(A). \end{array}\right.$$

Montrer que cette application n'est pas injective.

Exercice 13 (***)
Soit E et F deux ensembles, et $\varphi \in F^E$. On suppose $E \neq \emptyset$.
On définit l'application f par

$$f\ :\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & \varphi(A). \end{array}\right.$$

À quelle condition nécessaire et suffisante sur φ, f est-elle injective ?

Exercice 14 (***)
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
On définit l'application f par

$$f\ :\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A,\, X \cap B)\,. \end{array}\right.$$

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.
2) Même question pour que f soit surjective.
3) Conclure pour la bijectivité.

2– Analyse

I Fonctions usuelles

Toutes les études de fonction se font **sans calculatrice.**

Études qualitatives de fonctions

Exercice 1 (*) (Courbes)
Tracer les fonctions suivantes (sans calculatrice et avec le minimum de calculs) les fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \ln(x-1)+2$.
2) $x \mapsto \mathrm{e}^{|x|}$.
3) $x \mapsto \text{Arcsin}\,(\sin x)$.
4) $x \mapsto \dfrac{3x-2}{x-1}$.
5) $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$.

Exercice 2 (*) (Symétries)
Les fonctions suivantes sont-elles paires ? impaires ? périodiques ? de quelle période ? symétriques par rapport à un point ? à un axe ?

1) $x \mapsto \ln(|x|)$.
2) $x \mapsto \frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$.
3) $x \mapsto \sin\left(x^2\right)$.
4) $x \mapsto \sin\left(\frac{x+1}{2}\right)$.
5) $x \mapsto -x\,\mathrm{e}^{x^2-3}$.
6) $x \mapsto \mathrm{e}^{(x-3)^2+1}$.
7) $x \mapsto -\ln|(x+1)(x+2)|$.
8) $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+4}$.

Exercice 3 (**)
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$, croissantes.

1) Montrer que $f+g$ est croissante.
2) Si f et g sont positives, que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$?
3) Si f et g sont négatives, que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$?
4) Dans le cas général, que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$?

Exercice 4 (**) (Travailler son intuition)
Tracer (sans calculatrice et avec le minimum de calculs) l'allure des fonctions suivantes. L'objectif n'est pas d'obtenir un tracé précis, mais de s'exercer à « sentir » une expression mathématique.

1) $x \mapsto x\sin x$.
2) $x \mapsto x^2 \sin x$.
3) $x \mapsto \exp\left(-\frac{x}{2\pi}\right)\sin x$.

Composition

Exercice 5 (*)
On considère les applications

$$f\ :\ x \mapsto x^2+1 \quad \text{et} \quad g\ :\ x \mapsto \ln x.$$

Déterminer les domaines de définition et les expressions de $f\circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 6 (*)
On considère les applications

$$f\ :\ x \mapsto \frac{2x+1}{x-2} \quad \text{et} \quad g\ :\ x \mapsto x^2.$$

1) Donner les ensembles de définition de f et g.
2) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Images directes et réciproques

Exercice 7 (*)

$$f\ :\ x \mapsto \sqrt{x^2+x-2}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

2) Déterminer l'image de f, c'est-à-dire $f(\mathscr{D}_f)$.

3) L'application f est-elle injective de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbf{R}$?

Exercice 8 (*)

$$f \,:\, x \mapsto \sqrt{|x-1|}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

2) Déterminer l'image de f, c'est-à-dire $f(\mathscr{D}_f)$.

3) L'application f est-elle injective de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbf{R}$?

Exercice 9 (**)

$$f \,:\, x \mapsto \frac{4x^2}{2x-1}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

2) Déterminer $\mathrm{Im}\,(f) = f(\mathscr{D}_f)$.

3) L'application f est-elle injective de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbf{R}$?
Est-elle surjective entre ces mêmes ensembles ?

Dérivées

Exercice 10 (*)
Déterminer les domaines de définition, de dérivabilité, et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1) $x \mapsto \mathrm{e}^{(x^2)}$.
2) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$.
3) $x \mapsto \mathrm{e}^{2x+1}$.
4) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
5) $x \mapsto \ln|x|$.
6) $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$.

Exercice 11 (**)
Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité (avec les théorèmes généraux), et calculer les dérivées.

1) $x \mapsto \ln\left|x^2-3x+2\right|$.
2) $x \mapsto \sqrt{\tan x}$.
3) $x \mapsto \ln^2(x+1)$.
4) $x \mapsto \mathrm{ch}^2(x)$.
5) $x \mapsto \ln(\mathrm{th}\,(x))$.
6) $x \mapsto \ln(\mathrm{ch}\,(x))$.

Exercice 12 (**)
Déterminer les domaines de définition, de dérivabilité, et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1) $x \mapsto \sin^3(x)$.
2) $x \mapsto \sqrt{\ln(x^2-x+1)}$.
3) $x \mapsto \sqrt{\ln|x^2-x-1|}$.
4) $x \mapsto \mathrm{Arctan}\,\left(x^2\right)$.
5) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{x}$.
6) $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$.
7) $x \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{\mathrm{e}^{2x+1}+\sqrt{x}}$.
(ne pas chercher à simplifier)
8) $x \mapsto \ln\left(\mathrm{Arctan}\,(x^2-2x+1)\right)$.

Limites et branches asymptotiques

Exercice 13
Étudier les branches asymptotiques aux bords du domaine de définition.

1) $x \mapsto \sqrt{x^2-2x+4}$.
2) $x \mapsto \sqrt{x^3-2x^2+4}$.
3) $x \mapsto \sqrt{x+4}-\sqrt{x}$.
4) $x \mapsto \sqrt{x+4}-\sqrt{x-2}$.
5) $x \mapsto \sqrt{2x+4}-\sqrt{x-2}$.
6) $x \mapsto \sqrt{x^2+4}-\sqrt{x}$.
7) $x \mapsto \ln\left(x^2+1\right)$.
8) $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+1}-\mathrm{e}^{x^2}$.
9) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln(x)}$.
10) $x \mapsto \ln\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x\right)$.

Études complètes

Exercice 14 (*) (baccalauréat 1962)
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction

$$f : x \mapsto 2\,(1-\cos x)\,\sin^2(x).$$

Exercice 15 (**)
Étude complète de la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x}.$$

Exercice 16 (**)
Études complètes des fonctions de l'exercice 11.
On pourra se passer des calculs des dérivées et raisonner avec les compositions.

Exercice 17 (**)
Étude complète de la fonction

$$x \mapsto \ln \left| x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \right|.$$

Exercice 18 (**) (baccalauréat 1962)
Étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 - 2x + 2}.$$

En déduire le *nombre d'extrémités d'arcs*[1] u solutions de

$$(E) \quad : \quad (1-m)\sin^2 u - 2(m+1)\cos u + 3m + 4 = 0.$$

On posera cos $u = x$ et l'on discutera suivant les valeurs du paramètre m.

Exercice 19 (***)
Étude complète de la fonction

$$f \ : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}\right).$$

Injectivité-surjectivité

Exercice 20 (**) (applications circulaires réciproques)
En s'aidant des dérivées :

1) Montrer que
$$\forall x \in [-1,1],\ \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2},$$

2) Chercher une expression semblable pour
$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{pour } x \neq 0.$$

Exercice 21 (**)
Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans un intervalle J à préciser, et donner son application réciproque.

Exercice 22 (***)
Montrer que la fonction ch induit une bijection de $\mathbf{R}_+$ dans un intervalle J à préciser, et donner son application réciproque.

[1] Le nombre de $u \in [0, \pi]$ qui sont solution de l'équation.

Bijectivité

Exercice 23 (*) (Bijection continue)
Soit I une partie de $\mathbf{R}$, $a \leqslant b$ sont deux points de I.
Soit $f : I \to \mathbf{R}$, on suppose que $f(a) \leqslant f(b)$.
Montrer à l'aide de contre-exemples que les hypothèses du théorème de la bijection continue sont *minimales* (on ne peut pas en supprimer).

Exercice 24 (*)
On considère l'application
$$h : x \ \mapsto \frac{2x+1}{x+2}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_h$ de h.

2) Déterminer $\operatorname{Im}(h) = h(\mathscr{D}_h)$ et montrer que h est bijective de $\mathscr{D}_h$ dans $\operatorname{Im}(h)$.
Donner son application réciproque.

Exercice 25 (*)
Soient
$$f \ : \begin{cases} \mathbf{R} & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x^2+1} - x \end{cases} \quad \text{et} \quad g \ : \begin{cases} \mathbf{R}^* & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1-x^2}{2x}. \end{cases}$$

1) Montrer que la composée $f \circ g$ est bien définie sur $\mathbf{R}^*$ et calculer $(f \circ g)(x)$ pour tout x non nul.
Même question pour $g \circ f$.

2) Que peut-on en conclure ?

Exercice 26 (**)
Pour $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$ avec $c \neq 0$, on définit
$$f \ : \ x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}.$$

1) Donner le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

2) À quelle(s) condition(s) nécessaires et suffisantes sur (a,b,c,d), l'application est-elle bijective de son domaine de définition sur son image.
Dans ce cas, exprimer son image et l'application réciproque.

Exercice 27 (**)
Pour chaque fonction,

- indiquer le domaine de définition,
- étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité sur $\mathbf{R}$.

1) $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{x^2}$.

2) $x \mapsto x \sin x$.

3) $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$.

4) $x \mapsto x \lfloor x \rfloor$.

Synthèse et approfondissement

Exercice 28 (**)
Pour $(a, b, n) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{N}^*$ calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{ch}\,(a+kb)\,.$$

Simplifier l'expression au maximum.

Exercice 29 (**)
On définit les fonctions

$$f\ :\ x \mapsto (2x-1)^2 \quad \text{et} \quad g\ :\ x \mapsto \sup_{x \leqslant t \leqslant x+1} f(t).$$

Étudier g.

Exercice 30 (***)
Montrer que $\forall x \in \left]0,\,1\right[,\ x^x\,(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 31 (***)

1) Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbf{R}$ du nombre de solutions de l'équation

$$(E_a) \quad x^a = \ln(x).$$

2) Tracer dans un même repère la courbe représentative de $x \mapsto \ln x$ et celle de la fonction $x \mapsto x^{a_0}$ où a_0 est l'unique réel strictement positif tel que l'ensemble des solutions de E_{a_0} soit un singleton.

Exercice 32 (***)
Pour $0 < a \leqslant b,$ on considère la fonction

$$f\ : x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}.$$

Étudier la monotonie de f sur $\mathbf{R}_+^*$.
En déduire que

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2\,.$$

II Primitives

Pour commencer

Exercice 1 (*)
Préciser à chaque fois si F est une primitive de f.

1) $F(x) = x^2 - 5x + 3$ et $f(x) = x - 5$.
2) $F(x) = x^x$ et $f(x) = (\ln(x) + 1)\, x^x$.
3) $F(x) = \operatorname{Arctan}(x)$ et $f(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 (*)
Trouver les primitives à valeurs dans $\mathbf{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

1) $t \mapsto \mathrm{e}^{3t}$.
2) $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{5}\right)$.
3) $t \mapsto t^5 + 2t^3 - t - 1$
4) $t \mapsto (t-1)(t+1)$.
5) $t \mapsto \cos^2(t) + \sin^2(t)$.
6) $t \mapsto \cos^2(t) - \sin^2(t)$.
7) $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.
8) $t \mapsto \ln(t+1)$.
9) $t \mapsto t(t^2+1)^n$.
10) $t \mapsto \dfrac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}$.

Exercice 3 (*)
Donner une primitive à valeurs dans $\mathbf{R}$ de :

1) $t \mapsto \tan t$.
2) $t \mapsto \dfrac{t+2}{t^2+4t}$.
3) $t \mapsto \dfrac{t+2}{\sqrt{t^2+4t}}$.
4) $t \mapsto te^{5t^2}$.
5) $t \mapsto \sin(t)\cos(t)$.
6) $t \mapsto \dfrac{t}{t^2-5}$.
7) $t \mapsto \operatorname{th}(t)$.
8) $t \mapsto \tan^2(t)$.
9) $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{\cos^3(t)}$.

Exercice 4 (**)
Donner une primitive à valeurs dans $\mathbf{R}$ de :

1) $t \mapsto \dfrac{\ln^4(t)}{t}$.
2) $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$.
3) $t \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan(t)}}$.

Exercice 5 (***)
Donner une primitive à valeurs dans $\mathbf{R}$ de :

1) $t \mapsto \dfrac{\ln(t)-1}{t^2}$.
2) $t \mapsto \dfrac{1}{t+\sqrt{t}}$.
3) $t \mapsto \mathrm{e}^t\left(\dfrac{1}{t} + \ln(t)\right)$.

Exercice 6 (**)
Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

Intégration par parties

Exercice 7 (*)
Calculer

1) $\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.
2) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t$.
3) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$.
4) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos t\,\mathrm{d}t$.

Changement de variable

Exercice 8 (*)
En s'aidant à chaque fois d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

1) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^x \frac{\ln(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
2) $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\cos(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 (**)
Calculer

1) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t$.
2) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^x \frac{\ln(t)\,\mathrm{d}t}{t + t\left(\ln(t)\right)^2}$.
3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4(t)\,\mathrm{d}t$.
4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sin(t)}\,\mathrm{d}t$.

Fonctions circulaires

Exercice 10 (**)
Calculer

1) $\displaystyle\int_0^x \cos^3(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$.
2) $\displaystyle\int_0^x \cos^3(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.
3) $\displaystyle\int_0^x \cos^3(t)\sin^4(2t)\,\mathrm{d}t$.

Fonctions rationnelles

Exercice 11 (*)
Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes en indiquant le domaine de validité.

1) $t \mapsto \dfrac{1}{2t^2+5t+2}$.

2) $t \mapsto \dfrac{1}{4t^2-4t+1}$.

3) $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+4t+4}$.

4) $t \mapsto \dfrac{t}{t^4+2t^2+3}$.

Exercice 12 (**)
Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes en indiquant le domaine de validité.

1) $t \mapsto \dfrac{1}{1+\cos(t)}$.

2) $t \mapsto \dfrac{1}{2+\cos(t)}$.

3) $t \mapsto \dfrac{\cos(t)-1}{\cos(t)+1}$.

Exercice 13 (**)
Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes en indiquant le domaine de validité.

1) $t \mapsto \dfrac{\operatorname{th}(t)}{1+\operatorname{th}(t)}$.

2) $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)+1}$.

Entraînement

Exercice 14 (**)
Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée.

1) $x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

2) $x \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos^5(tx)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 15 (**)
Calculer

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{Arcsin}(t)\,\mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int_0^1 t\operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$.

3) $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

4) $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\cos\left(\mathrm{e}^t\right)\,\mathrm{d}t$.

5) $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

6) $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 16 (**)

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que $C = S$ grâce à un changement de variables.

2) Que vaut $C+S$. En déduire les valeurs de C et de S.

3) En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 17 (**)
En s'aidant d'une formule de récurrence, calculer

$$u_n = \int_0^x t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{où } n \in \mathbf{N}.$$

On donnera l'expression sous forme de somme.

Exercice 18 (**)
Calculer

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{u}{2}\right)\ln\left(1+\cos(u)\right)\,\mathrm{d}u.$$

Exercice 19 (***)

Trouver une primive de $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{3+\sin(2t)}$.

Exercice 20 (***)
Pour $x \in \mathbf{R}$, calculer

$$\int_0^{\sin^2(x)} \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2(x)} \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 21 (***) (Intégrales de Wallis)

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1) À l'aide de l'intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n+2}.

2) Exprimer I_n en fonction de n en distinguant les cas n pair et n impair.

3) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.
À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_n = J_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

III Équations différentielles linéaires

Équations d'ordre 1

Exercice 1 (*)
Résoudre :

1) $2y' = 1$ avec $y(0) = 2$
2) $2y' = a - y$ avec $a \in \mathbf{K}$ et $y(0) = -1$
3) $y'' = 4y' + 1$ avec $y(0) = 1$ et $y'(1) = 1$

Exercice 2 (*)
Résoudre :

1) $y' = -\tan(x)y + \dfrac{1}{\cos(x)}$ sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
2) $y' = \tan(x)y + \dfrac{1}{\cos(x)}$ sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 3 (*)
Résoudre :

1) $4y' - 3y = 0$.
2) $y' + \dfrac{1}{1+t^2}\, y = 0$.
3) $y' = \dfrac{2}{1-t^2}\, y$.
4) $y' = t(y+2)$.
5) $y' - 3y = \mathrm{e}^{3x} + 2x\,\mathrm{e}^{x}$.
6) $y' = y + t$ avec $y(0) = 1$.
7) $y' = (1+t)\, y$.
8) $y' + 2ty = t$ avec $y(0) = 1$.
9) $y' + 2y = (t-2)^2$.
10) $y' = \cos t + y$.
11) $4y' + y = \cos(t)$ et $y(0) = 0$.
12) $y' - y = \operatorname{sh} t$ et $y(0) = 1$.

Équations d'ordre 2

Exercice 4 (*)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' + y' - 2y = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.
2) $y'' - 4y' + 4y = 4$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
3) $y'' + y' + \frac{y}{2} = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 0$
4) $y'' - 2y' + y = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
5) $y'' - 2y' = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
6) $y'' = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
7) $y'' = -y$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 5 (*)
Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes :

1) $y'' + y' + y = \cos(2x)$.
2) $y'' + y = \cos(x)$.
3) $y'' + 4y = \sin(2x)$.
4) $y'' + y' - 2y = x\,\mathrm{e}^{-2x}$.
5) $y'' - 4y' + 4y = (x^3 + x)\,\mathrm{e}^{2x}$.

Exercice 6 (**)
Pour quelles valeurs des réels a et b, chaque solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation

$$y'' + ay' + by = 0$$

s'annule-t-elle en une infinité de points ?

Exercice 7 (*)
Soit $\omega_0 \geqslant 0$. Résoudre suivant les valeurs de ω :

$$y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega t).$$

Changement d'inconnue ou de variable

Exercice 8 (*)
Résoudre l'équation différentielle $y' = y \ln y$. *On pourra poser* $y(t) = \mathrm{e}^{z(t)}$.

Exercice 9 (*)
Résoudre sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x^2 y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0\,.$$

On pourra poser z tel que : $\forall x > 0,\ z(x) = x^2 y(x)$.

Exercice 10 (**)
Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbf{R}_+^*$

$$(E) \qquad x^2 y'' + 4xy' - 2y = 0.$$

avec le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$.

Exercice 11 (***)
Trouver un changement de variable $x = g(t)$ qui transforme cette équation en équation différentielle linéaire à coefficients constants. Puis résoudre. (a est constant)

$$(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + a^2 y = 0.$$

Retrouver l'équation différentielle

Exercice 12 (**)
Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbf{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \qquad \int_0^x (2x - 3t) f(t) \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 13 (**)
Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad f'(x) + f(-x) = -2(x + 1)\,\mathrm{e}^x.$$

Exercice 14 (***)
Déterminer toutes les fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x + y) = f(x)f(y).$$

Entraînement

Exercice 15 (**)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = f(-x).$$

Exercice 16 (**)
Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad 2f(x) = 3x \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 17 (***)
Résoudre l'équation différentielle $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$.

Exercice 18 (***)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \qquad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 19 (***)

1) Déterminer toutes les solutions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de l'équation :
$$(E) \quad xy' - 3y = 0.$$
2) Résoudre les équations suivantes sur $\mathbf{R}$ (tout entier) :
$$(E_1) \quad xy' - 2y = x \quad \text{et} \quad (E_2) \quad xy' + 2y = x.$$
3) Soit l'équation $(E) \quad xy' - 2|y| = x$.
   (a) Montrer que (E) n'a pas de solution sur $\mathbf{R}$.
   (b) Donner et tracer les solutions de (E), définies sur $\mathbf{R}_+^*$.

CCINP

Exercice 20 (CCINP 42)
On considère les équations différentielles suivantes :

$$(H) : 2xy' - 3y = 0 \quad \text{et} \quad (E) : 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$

1) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

IV Convergence des suites

Pour commencer

Exercice 1 (Vrai / Faux)
Répondre en justifiant.

1) Le produit de deux suites majorées est-il nécessairement majoré ?
2) Une suite non croissante est-elle nécessairement décroissante ?
3) Une suite qui converge vers une limite strictement positive ℓ a-t-elle tous ses termes strictement positifs à partir d'un certain rang ?
4) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est-elle nécessairement décroissante à partir d'un certain rang ?
5) La somme (ou la différence) de deux suites divergentes est-elle nécessairement divergente ?
6) Existe-t-il une suite divergente $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$?
7) Une suite divergente est-elle nécessairement non bornée ?
8) Une suite non bornée est-elle nécessairement divergente ?
9) Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, alors (u_n) converge-t-elle nécessairement ?

Exercice 2 (*)
Soit (u_n) une suite monotone telle que (u_{2n}) converge.
Montrer que (u_n) converge.

Exercice 3 (*)
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies ci-après. Montrer que les suites sont adjacentes et qu'elles convergent.

1) $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

2) $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 4 (*)
Étudier la suite z définie par

$$\forall n \in \mathbf{N},\ z_n = (-1)^n\,\mathrm{e}^{in\frac{\pi}{2}}.$$

Suites définies explicitement

Nature et limite

Énoncé commun à tous les exercices de cette partie :
Vérifier que la suite est bien définie, trouver sa nature (avec démonstration), et calculer sa limite si elle existe.

Exercice 5 (*)

1) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}$.

2) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \dfrac{3n^2-2n+1}{n\sqrt{n}+n-1}$.

3) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \dfrac{3n^2-2n+1}{n^6-2n^4-9}$.

4) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$.

Exercice 6 (*)

1) $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \sqrt{1+n^2}-\sqrt{1+n}$.

2) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$.

3) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \dfrac{\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{n}}{n}$.

4) $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = n-\sqrt{(n+1)(n+3)}-\sqrt{n}$.

Exercice 7
$\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \dfrac{n\cos(\pi\sqrt{n})-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$.

Exercice 8 (**)

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Nature

Énoncé commun à tous les exercices de cette partie :
Vérifier que la suite est bien définie, trouver sa nature (avec démonstration),

Exercice 9 (**)

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}.$$

Exercice 10 (***)

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Exercice 11 (***)
Montrer que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbf{N}}$ diverge.

Exercice 12 (***)
Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, on définit la suite u par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}.$$

Déterminer la nature de la suite en fonction de α.
Voir les indications pour des sous-questions.

Suites et primitives

Exercice 13 (**)
Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que la suite u est strictement décroissante.
2) Montrer que la suite v est majorée.
3) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leqslant 1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ et en déduire que u converge vers 0.
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} u_n$.
5) En déduire une expression simple de u_n.

Exercice 14 (***)
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit

$$\begin{cases} u_n &= \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t \\ v_n &= \displaystyle\int_0^n \frac{t^n}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t \\ w_n &= \displaystyle\int_0^n \frac{t}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Étudier la nature de chacune de ces suites.

Exercices théoriques

Exercice 15 (**) (à connaître)
Soit u une suite à valeurs non nulles.
On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \overline{\mathbf{R}}$.

1) Montrer que si $\ell \in]-1, 1[$, alors la suite converge vers 0.
2) Montrer que si $\ell \in]1, +\infty[\cup \{+\infty\}$, alors la suite est de signe constant à partir d'un certain rang et diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.
3) Montrer que si $\ell \in]-\infty, -1[\cup \{-\infty\}$, alors la suite diverge sans admettre de limite.
4) Montrer que si $\ell = -1$ ou $\ell = 1$, alors on ne peut pas conclure a priori (donner des exemples de convergence et de divergence).

Exercice 16 (**)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $[0,1]^{\mathbf{N}}$ telles que $(u_n\, v_n)$ converge vers 1.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 17 (**)
Soit une suite réelle telle que

$$\forall (k, n) \in (\mathbf{N}^*)^2,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{k}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Premières suites récurrentes

Exercice 18 (*)
Étudier les suites (u_n) définies par

1) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1}$.
2) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 4$.
3) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{3}{4} + u_n^2}$.
4) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n + u_n^2}$.
5) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n + u_n^2}$.
6) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 1 - \cos u_n$.

Exercice 19 (**)
Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

1) Vérifier que (u_n) est bien définie.
2) Si la suite converge, que vaut sa limite ?
3) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - 1|$.
4) Conclure sur la convergence de (u_n).

Exercice 20 (***)
Étudier la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec } f : x \mapsto \frac{1}{2}\cos(x).$$

Densité

Ces exercices sont plus difficiles et ne sont donc pas prioritaires.

Exercice 21 (**)
Questions de plus en plus difficiles.
On admet que $\mathbf{Z} + 2\pi\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

1) Montrer que $\{|\sin(n)|\}_{n\in\mathbf{N}}$ est dense dans $[0,\ 1]$.
2) Montrer que $\{\sin(n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ est dense dans $[-1,\ 1]$.
3) Montrer que tout $x \in [-1,\ 1],$ est valeur d'adhérence de la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice 22 (***)
Soient u et v deux suites de nombres réels telles que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0.$$

1) Montrer que $\left\{u_p - v_q,\ (p,\ q) \in \mathbf{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.
2) Montrer que $\{\cos(\ln(n)),\ n \in \mathbf{N}^*\}$ est dense dans $[-1,\ 1]$

Exercice 23 (***)
Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$.

1) On suppose que
$$\forall (a,\ b) \in A^2,\ \frac{a+b}{2} \in A.$$
Montrer que A est dense dans $]\inf A,\ \sup A[$.
2) On suppose $A \subset \mathbf{R}_+^*$ tel que
$$\forall (a,\ b) \in A^2,\ \sqrt{ab} \in A.$$
Montrer que A est dense dans $]\inf A,\ \sup A[$.

Entraînement

Exercice 24 (**)
Montrer qu'une suite de $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ converge si, et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 25 (**)
Soit la suite harmonique $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout $n \geqslant 1$ par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Étudier la nature de la suite extraite (H_{2^n}).
2) En déduire la nature de (H_n) et son éventuelle limite.

Exercice 26 (**)
Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}.$$

Montrer que la suite diverge vers $+\infty$.

Exercice 27 (**)
Soient a et b deux réels positifs. Soient u et v les suites initialisées par $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et définies par la récurrence : $\forall n \geqslant 0 \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad$ et $\quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1) (a) Montrer que u et v sont bien définies, puis que :

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n \leqslant v_n.$$

   (b) Montrer que u et v sont convergentes et ont la même limite que l'on note $M(a,b)$.

2) (a) Calculer $M(0,1)$ et $M(1,1)$.
   (b) Montrer que $x \longmapsto M(1,x)$ est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

Exercice 28 (**)
Montrer qu'une suite bornée converge si, et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.
Montrer que c'est faux si la suite n'est pas supposée bornée.

Exercice 29 (***)
Soit $x \in \mathbf{R}$.
Par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$, il existe une suite $(x_n) \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbf{Z}$ et $q_n \in \mathbf{N}^*$.
Montrer que si (q_n) est bornée, alors $x \in \mathbf{Q}$.

Exercice 30 (***) (Suites de Cauchy)
Soit $u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.
On dit que u est une *suite de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall p \geqslant n_0,\ \forall q \geqslant n_0,\ |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

1) Montrer que u est convergente si, et seulement si u est une suite de Cauchy.
2) Soit $(a,\, b) \in \mathbf{R}$, $f\ : [a,\, b] \to [a,\, b]$ telle que

$$\exists c \in [0,\, 1[,\ \forall (x,\, y) \in [a,\, b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant c\,|x - y|\,.$$

   On dit que f est contractante.
   On admet qu'une fonction contractante est continue.

   (a) Montrer que f admet au plus un point fixe.
   (b) Soit $u_0 \in [a,\, b]$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que la suite est de Cauchy.
   (c) En déduire que f admet un unique point fixe sur $[a,\, b]$.
   (théorème du point fixe de Picard)
   (d) Discuter de la validité de ce résultat si on choisit un intervalle autre qu'un segment.

Exercice 31 (***) (Irrationnalité de e)

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

1) Montrer que (u_n) et (v_n) ont une limite commune.
2) On admet que cette limite est $\mathrm{e} = \exp(1)$. Montrer que e est irrationnel.
   Indication : Poser par l'absurde $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, et comparer avec u_q et v_q.

Exercice 32 (***)
Soit (u_n) une suite à valeurs positives telle que

$$\forall (p,q) \in \mathbf{N}^2, \quad u_{p+q} \leqslant u_p + u_q.$$

1) Justifier que $\inf_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{u_n}{n}$ existe.
2) Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n>0}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{u_n}{n}.$$

   On pourra pour $q \in \mathbf{N}^*$ fixé et $n \geqslant q$, écrire $n = kq + r$ avec $r \in [\![0,\, q-1]\!]$.

Exercice 33 (***) (Césarò et l'escalier)

1) (*Césarò*)
Soit u une suite réelle qui converge vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \ell.$$

Utiliser la définition quantifiée. On pourra commencer par le cas $\ell = 0$.

2) La réciproque est-elle vraie ?

3) Soit u une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.

4) Soit u_n une suite réelle qui converge vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.
On considère une suite α strictement positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = +\infty$.
Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k u_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k} = \ell.$$

Exercice 34 (CCINP 43)
Soit $x_0 \in \mathbf{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

1) (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2) Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbf{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ h(x) = h\left(\operatorname{Arctan} x\right).$$

V Limites et continuité

Limites

Exercice 1 (*)
Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle admet une limite au point a, une limite à droite, à gauche.
Si elle est définie en a, étudier sa continuité en a, à droite de a, à gauche de a.
Si elle n'est pas définie en a, étudier si elle admet un prolongement par continuité en a.

1) $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ en $a = 1$.
2) $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$ en $a = 0$.
3) $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ en $a = 1$.
4) $x \mapsto x\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$ en $a = 0$.
5) $x \mapsto x \sin \dfrac{1}{x}$ en $a = 0$.
6) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ en $a = 0$.
7) $x \mapsto \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 1}$ en $a = 1$.
8) $x \mapsto \sqrt{x} \ln x$ en $a = 0$.
9) $x \mapsto |x| \ln |x|$ en $a = 0$.
10) $x \mapsto x^{\pi}$ en $a = 0$.
11) $x \mapsto \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$ en $a = 1$.
12) $x \mapsto \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 7x}$ en $a = 0$.

Exercice 2 (**)
Déterminer les limites suivantes si elles existent :

1) $\lim\limits_{x \to 0} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.
2) $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x) \ln(\ln x)$.

Exercice 3 (**)

$$f : x \mapsto \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$$

La fonction admet-elle une limite en $+\infty$?
Indication : étudier $f(n)$ et $f(n + \frac{1}{2})$.

Fonctions usuelles

Exercice 4 (**)
Étudier la continuité sur $\mathbf{R}$ de l'application

$$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

Exercice 5 (***)
Étudier la continuité de la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$.

$$f : x \mapsto \sup_{n \in \mathbf{N}} \frac{x^n}{n!}$$

Continuité

Exercice 6 (*)
Montrer qu'un polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 7 (*)
Montrer qu'une application continue périodique sur $\mathbf{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 8 (**) (méthode)

1) Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$ et f continue sur $]a, b[$.
On suppose que f admet des limites finies en a et en b.
Montrer que f est bornée sur $]a, b[$.
2) Montrer que le résultat subsiste pour $a = -\infty$ et $b = +\infty$.

Exercice 9 (*)
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0, 1]; [0, 1])$.
Montrer que f admet un point fixe dans $[0, 1]$, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 10 (*)
Montrer que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et n'admet pas de point fixe, alors $f \circ f$ n'admet pas de point fixe non plus.
Montrer que le résultat n'est plus vrai si f n'est pas supposée continue.

Exercice 11 (**)
Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbf{R}$.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 12 (*)
Montrer que les seules applications continues sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$ sont les applications constantes.

Exercice 13 (**)
Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, continue, telle que $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f(x) < x$.

1) Montrer que $f(0) = 0$.
2) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}_+^*$, avec $a \leqslant b$, il existe $M \in [0, 1[$, tel que
$$\forall x \in [a, b],\ f(x) \leqslant Mx.$$

Exercice 14 (*)
Soit $f\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction bornée sur $\mathbf{R}$ et $g\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées sur $\mathbf{R}$.

Exercice 15 (**)
Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction croissante sur $]a, b]$ et continue en a. Montrer que f est croissante sur $[a, b]$. Faire de même avec la stricte croissance.

Exercice 16 (**)

1) Soit f une application continue surjective de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}$. Montrer que pour tout $y \in \mathbf{R}$, y admet une infinité d'antécédents par f.
2) Ce résultat est-il aussi valable si l'application est de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$? Justifier.
3) Donner l'exemple d'une application continue surjective de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}$. Démontrer que l'exemple est valable.

Équations fonctionnelles

Exercices à faire dans l'ordre. On pourra utiliser les résultats des exerices précédents pour résoudre les suivants.

Exercice 17 (**)
Trouver toutes les applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 18 (***)
Trouver toutes les applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Exercice 19 (***)
Trouver toutes les applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x) \times f(y).$$

Entraînement

Exercice 20 (*)
Montrer qu'une fonction polynomiale à valeurs dans $\mathbf{Q}$ est constante.

Exercice 21 (*)
f continue sur $[0, 1]$, montrer que la suite $\left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f(k/n)}{2^k}\right)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 22 (**)
Trouver les fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ solution de :
$$y' = |y|.$$

Exercice 23 (**)
Soit f décroissante et continue sur $\mathbf{R}$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 24 (**)
Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ une application croissante telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 25 (***)
Soit f continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists a_n \in [0, 1], f(a_n) = a_n^n$.
2) En supposant f strictement décroissante, montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n$ est unique et étudier la suite (a_n).

Exercice 26 (***)
Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue vérifiant
$$f \circ f = \mathrm{Id}.$$
Déterminer f.

Exercice 27 (***)
Soit $f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists \alpha_n \in [0, 1], \text{ tel que } f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha_n).$$

VI Dérivabilité

Calcul

Exercice 1 (*)
Sur quelle(s) partie(s) de $\mathbf{R}$, les applications suivantes sont-elles continues ? dérivables ? Calculer leur dérivée.
Dans le cas d'un prolongement possible par continuité, étudier la dérivabilité de la fonction prolongée, éventuellement son caractère $\mathscr{C}^1$.

1) $f\ :\ x \mapsto 2^{x^2+1}$.
2) $f\ :\ x \mapsto x|x|$.
3) $f\ :\ x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$.
4) $f\ :\ x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$.
5) $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
6) $f\ :\ x \mapsto \ln(\sqrt{x-1}+1)$.
7) $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}} \sin \frac{1}{x}$.
8) $f\ :\ x \mapsto (x+1)^{\cos x}$.
9) $f\ :\ x \mapsto (\sqrt{x}+1)^{\ln x}$.
10) (***) $f\ :\ x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^{-x}$.

Exercice 2 (*)
Déterminer les extrémums locaux de $f\ : x \mapsto x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbf{R}$.

Exercice 3 (*)
À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ \frac{x}{1+x^2} \leqslant \operatorname{Arctan} x \leqslant x.$$

Exercice 4 (**)
À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} \left((x+1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \right).$$

Exercice 5 (**)
Soit $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

1) Montrer que f peut être prolongeable en une application continue sur $\mathbf{R}$.
   On travaillera désormais avec l'application prolongée.
2) Faire l'étude des branches infinies de f.
3) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, \exists P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$

4) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

Exercice 6 (**) (Règle de l'Hospital)
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ et telles que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$.

1) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2) En déduire que :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell.$$

3) Application : calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^x}{(x+1)\,\mathrm{e}^x - 1}.$$

Fonctions lipschitziennes

Exercice 7 (*)
Soient $K_1 \leqslant K_2$ deux réels positifs.
Comparer les ensembles : $\{f\ : I \to \mathbf{R},\ f$ est K_1-lipschitzienne sur $I\}$ et $\{f\ : I \to \mathbf{R},\ f$ est K_2-lipschitzienne sur $I\}$.

Exercice 8 (**)
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\alpha > 1$. Déterminer toutes les applications vérifiant

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^\alpha.$$

Raisonnements théoriques simples

Exercice 9 (*)
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable, telle que f' ne s'annule pas. Montrer que f ne peut pas être périodique.

Exercice 10 (*)
Soit f une fonction dérivable sur I.

1) Montrer que si f est paire, alors f' est impaire.
   Montrer que si f est impaire, alors f' est paire.
2) A-t-on les réciproques ?

Exercice 11 (*)
Soit f dérivable en a. Montrer que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=f'(a).$$

Réciproquement, si la limite précédente existe, f est-elle nécessairement dérivable en a ?

Exercice 12 (**) (à connaître)
Soit $P\in\mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 scindé à racines simples[2]. Montrer que P' est aussi scindé à racines simples.

Exercice 13 (**)
Soit $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ une fonction dérivable, et

$$g:\left\{\begin{array}{ccl}[0;1] & \to & \mathbf{R}\\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} f(2x) & \text{si } x\in[0;\frac{1}{2}]\\ f(2x-1) & \text{sinon.}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

À quelle(s) condition(s) g est-elle dérivable ?

Exercice 14 (**)
Soit $f\in\mathscr{C}^2(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$ telle que $f'(0)=0$.
Montrer qu'il existe une fonction $g\in\mathscr{C}^1(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$ telle que pour tout $x\in\mathbf{R}_+$,

$$f(x)=g\left(x^2\right).$$

Exercice 15 (**) (méthode)
Soit f dérivable sur $]0,1[$ et admettant une limite finie commune en 0 et en 1.

1) Montrer qu'il existe $c\in]0,1[$ tel que $f'(c)=0$.

2) Est-ce encore vrai si la limite n'est pas supposée finie ?

3) Soit f dérivable sur $\mathbf{R}$ et admettant la même limite finie en $\pm\infty$.
Montrer qu'il existe $c\in\mathbf{R}$ tel que $f'(c)=0$.

Convexité

Exercice 16 (*)
Montrer que

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2x}{\pi}\leqslant\sin(x)\leqslant x.$$

[2]Qui a autant de racines que son degré.

Exercice 17 (*)
Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ convexe.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bornée.

Exercice 18 (*)
Soient f et g deux fonctions convexes $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ telles que g est croissante.
Montrer que $g\circ f$ est convexe.
Donner un contre-exemple si g n'est pas croissante.

Exercice 19 (*)
Soit f convexe de $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, montrer que f est continue.

Exercice 20 (*)
Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une fonction convexe.

1) On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.
Montrer que f est positive.

2) On suppose que le graphe de f possède la droite $y=ax+b$ comme asymptote oblique en $+\infty$.
Donner la position de f par rapport à son asymptote.

Exercice 21 (*)
Soit f convexe sur $\mathbf{R}$ qui admet un minimum local en a.
Montrer que ce minimum est global.

Exercice 22 (***)
Soient $(x_1,\cdots,x_n,y_1,..y_n)$ des réels positifs. Montrer que

$$(x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}+(y_1\cdots y_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant((x_1+y_1)\times\cdots(x_n+y_n))^{\frac{1}{n}}.$$

Indication : on pourra s'intéresser à la fonction $x\mapsto\ln(1+e^x)$.

Approfondissement

Exercice 23 (***)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on considère le polynôme

$$P = \left(X^2 - 1\right)^n .$$

1) Montrer que pour tout $k \in [\![0,\, n-1]\!]$

$$P^{(k)}(-1) = P^{(k)}(1) = 0.$$

2) Montrer que $P^{(n)}$ est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$ et que toutes ses racines sont dans $]-1,\,1[$:

$$\mathrm{Rac}(P^{(n)}) \subset]-1,\,1[.$$

3) Calculer $P^{(n)}(1)$.

Exercice 24 (***) (Théorème de Darboux)
Soit I un intervalle ouvert, $f \in \mathscr{D}^1(I, \mathbf{R})$. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.

Exercice 25 (***)
Soit $a > 0$ et f une fonction réelle continue sur $[0, a]$ et dérivable sur $]0, a]$.
On suppose que $f(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0, a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 26 (***)
Soit $n \in \mathbf{N}$, I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{R})$.
On suppose que f s'annule en $n+1$ points distincts de I.

1) Montrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins une fois sur I.

2) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que la dérivée $(n-1)^{\text{ème}}$ de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I.

Exercice 27 (***)
Soit f définie sur un voisinage de 0 et continue en 0.
On suppose que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0.$$

Montrer que f est dérivable en 0.

Exercice 28 (***)
Soit $f\ : [0,\, 1] \to \mathbf{R}$, concave, telle que $f(0) \geqslant 0$.
Montrer que

$$\int_0^1 x f(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3} \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Exercices CCINP

Exercice 29 (CCINP 3)

1) On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2) On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice 30 (CCINP 4)

1) Énoncer le théorème des accroissements finis.

2) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

3) Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

Indication: on pourra considérer la fonction g définie par: $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

VII Suites numériques - relations de comparaison

On ne s'intéresse pas encore aux suites définies implicitement.

Pour commencer...

Exercice 1
Classer les suites, dont les termes généraux sont les suivants, par ordre de négligeabilité :

1) $\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n^2},\ \dfrac{\ln n}{n},\ \dfrac{\ln n}{n^2},\ \dfrac{1}{n\ln n}$ 2) $n,\ n^2,\ n\ln n,\ \sqrt{n}\ln n,\ \dfrac{n^2}{\ln n}$

Exercice 2 (Vrai-Faux)
Dire pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse. Le démontrer.

1) Si $u_n \sim v_n$ alors pour toute application f définie sur $\mathbf{R}$, $f(u_n) \sim f(v_n)$,
2) Si $u_n = o(n)$ et $v_n = o(n)$, alors $(u_n - v_n) = o(0)$,
3) Si $u_n \sim \frac{1}{n}$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang,
4) Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n$ tend vers 0,
5) Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ et si (v_n) ne s'annule pas alors $u_n \sim v_n$.

Exercice 3 (*)
Montrer que $n! = o\left(n^n\right)$ de deux façons différentes.

Exercice 4 (*) (à connaître)
Calculer

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m,\ \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 5 (**) (passage au logarithme)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives telles que $u_n \sim v_n$.

1) Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0,\,1[\cup]1,\,+\infty[\cup\{+\infty\}$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
2) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, trouver un exemple pour lequel l'équivalent ne passe pas au logarithme.

Calculs

Exercice 6 (*)
Donner la nature de la suite, et sa limite éventuelle

1) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \dfrac{(-2)^n}{n^2}$. 2) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercice 7 (*)
Donner un équivalent simple :

1) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}$.
2) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \dfrac{3n^2-2n+1}{n\sqrt{n}+n-1}$.
3) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \dfrac{3n^2-2n+1}{n^6-2n^4-9}$.
4) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$.
5) $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \sqrt{1+n^2}-\sqrt{1+n}$.
6) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$.
7) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \dfrac{\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{n}}{n}$.
8) $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = n-\sqrt{(n+1)(n+3)}-\sqrt{n}$.

Exercice 8 (*)
Trouver un équivalent simple et la limite éventuelle :

1) $u_n = \dfrac{2n^2+n\ln^2 n}{n^2\ln n+\sqrt{n}}$. 2) $u_n = \dfrac{n+\mathrm{e}^n}{2^n+3^n}$. 3) $u_n = \mathrm{e}^n + n^{\mathrm{e}}$.

Exercice 9 (**)
Trouver un équivalent simple et la limite éventuelle :

1) $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.
2) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
3) $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - n$.
4) $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n+1}} - \sqrt{n-\sqrt{n+1}}$.
5) $u_n = \dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.
6) $u_n = (n+1)^{n+1} - n^n$.

Exercice 10 (*)
Trouver un équivalent simple :

1) $u_n = \sin\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{n}$.
2) $u_n = \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1}$.

Exercice 11 (**)
Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et $x \in]0,1[$ fixés.

1) Montrer que $\dbinom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$
2) En déduire que la suite $\left(\dbinom{n}{k}x^n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ admet une limite quand $n \to +\infty$, et donner la valeur de cette limite.

Entraînement

Exercice 12 (**)
Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!\,.$$

Exercice 13 (**)
Soit (u_n) une suite décroissante telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

1) Montrer que (u_n) converge vers 0^+.
2) Donner un équivalent simple de u_n en $+\infty$.
3) Montrer à l'aide d'un contre-exemple que si (u_n) n'est pas supposée décroissante, mais positive convergente vers 0, alors l'équivalent simple trouvé précédemment n'est pas toujours valable.

Exercice 14 (***)
Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n\,\mathrm{e}^{-u_n}.$$

1) Montrer que (u_n) converge vers 0.
2) Montrer que $u_{n+1} = u_n - u_n^2 + o(u_n^2)$.
3) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} = -1$.
4) En déduire[3] que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

[3] Penser à Césaro.

VIII Analyse asymptotique

Notation : $DL_k(x)$ désigne le développement limité à l'ordre k en x.

Calculs

Exercice 1 (*)
Faire un développement limité de

1) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
2) $DL_3(0)$ de $\ln(1+\sin x)$
3) $DL_3(1)$ de $\cos(\ln(x))$
4) $DL_6(0)$ de $\ln(\cos x)$
5) $DL_7(0)$ de $\sin(\operatorname{Arctan}(x))$
6) $DL_4(1)$ de $(\ln x)^2$
7) $DL_3(0)$ de $\mathrm{e}^{\sin x}$
8) $DL_8(0)$ de $\sin^6 x$
9) $DL_2(0)$ de $\dfrac{\operatorname{Arctan} x - x}{\sin x - x}$
10) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$
11) $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $\ln\sin x$
12) $DL_3(0)$ de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2 (*)
Déterminer les développements limités suivants :

1) $DL_3(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1}$.
2) $DL_2(0)$ de $\frac{\operatorname{Arctan} x}{\tan x}$.
3) $DL_2(1)$ de $\frac{x-1}{\ln x}$.

Exercice 3 (**)
Donner le développement à l'ordre 5 en 0 de Arcsin par les deux méthodes suivantes

1) $\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2) $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$ pour $x \in [-1;1]$

Exercice 4 (**) (Équivalent simple)
Donner une équivalent simple en 0 de

1) $\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)$.
2) $(1+\sin x)^x - (1+x)^{\sin x}$.

Développements asymptotiques

Exercice 5 (*)
Réaliser un développement asymptotique en $+\infty$ de

1) $x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right)$ à 2 termes
2) $\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x}$ à 2 termes.

Exercice 6 (*)
Réaliser un développement asymptotique en $+\infty$ de

1) $\sqrt{x+1}$ à la précision $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.
2) $x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x)$ à la précision $\frac{1}{x^2}$.
3) $\operatorname{Arctan}(x)$ à la précision $\frac{1}{x^3}$.

Applications aux études de fonctions

Exercice 7 (*) (Passage au logarithme)
Soient f, g deux applications strictement positives au voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$ telles que $f \sim_a g$.
On suppose que f admet une limite en a, notée $L \in \overline{\mathbf{R}}$ telle que $L \neq 1$

1) Montrer que $\ln(f) \sim_a \ln(g)$.
2) Montrer que le résultat est faux pour $L = 1$.

Exercice 8 (*)
Soit $f :]-1, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point ?

Exercice 9 (*)
Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$$

peut être prolongée en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

Exercice 10 (**)
Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $a \in \mathbf{R}$.
Étudier la limite en 0 de

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

Exercice 11 (**)
Soient a un réel non nul et f la fonction définie au voisinage de 0 par

$$f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}.$$

Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.
Un point d'inflexion est un changement de sens de courbure de la courbe.

Exercice 12 (**)
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

Étudier les branches infinies de f et donner la position des asymptotes par rapport à la courbe.

Exercice 13 (**)
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Étudier la branche infinie de f en $+\infty$ et donner la position des éventuelles asymptotes par rapport à la courbe.

Exercice 14 (**)
Étudier les branches infinies des fonctions suivantes.

1) $f\ : x \mapsto x^2 \mathrm{Arctan}\left(1+x^2\right).$

2) $f\ : x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}.$

Développements implicites

Exercice 15 (**) (Étude locale d'une réciproque)
Montrer que l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ admet une application réciproque définie sur $\mathbf{R}$ et former le $DL_5(0)$ de f^{-1}.

Exercice 16 (***)
Pour $\lambda > 0$ on définit

$$f_\lambda\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{1/x}. \end{array}\right.$$

1) Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = 1$ admet une unique solution x_λ.

2) Donner un développement asymptotique à trois termes de x_λ quand $\lambda \to +\infty$.

Entraînement

Exercice 17 (*)
Calculer les limites des expressions suivantes (si elles existent).

1) $(\tan(x))^{\tan(2x)}$ en $\frac{\pi}{4}$.

2) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ en 0.

3) $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x}$ en 0.

4) $\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$ en 1.

5) $\dfrac{1}{\sin^4(x)}\left(\sin\left(\dfrac{x}{1-x} - \dfrac{\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)\right)$ en 0.

6) $\dfrac{(1+x)^{\frac{\ln(x)}{x}} - x}{x(x^x-1)}$ en 0.

Exercice 18 (*)
Proposé par Rywann, 2021
Existe-il $\eta > 0$, $n \in \mathbf{N}$ et $(a_i)_{i \in [\![0,\, n]\!]}$ tel que

$$\forall x \in]-\eta, \eta[,\ \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

En d'autres termes, peut-on, pour un ordre assez grand, trouver un développement limité exact de l'exponentielle sur un voisinage de 0 ?

Exercice 19 (**)
Déterminer les développements limités suivants :

1) $DL_{10}(0)$ de $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}.$

2) $DL_3(2\pi)$ de $\quad \sin\sqrt{x^2-3\pi^2}$.

3) $DL_{100}(0)$ de $\quad \ln\left(\sum_{k=0}^{98}\frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 20 (**)
Montrer qu'il existe deux réels a et b (que l'on calculera), tels qu'en $+\infty$ on ait

$$\int_0^1 \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{n}} \,\mathrm{d}x = a+\frac{b}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 21 (***)
Soient $n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant 2$ et $f\ :\mathbf{R}_{\rightarrow}\mathbf{R}$ définie par

$$f(x)=x^n\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x\neq 0 \text{ et } f(0)=0.$$

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

2) f admet-elle un développement limité en 0 ? si oui à quel ordre maximal ?

Exercice 22 (***)
Soit $t>0$.

1) Montrer que l'équation
$$x\,\mathrm{e}^x=\frac{1}{t}$$
admet une unique solution $x_t>0$.

2) Déterminer un développement asymptotique à trois termes de x_t quand $t\to+\infty$.

Exercices CCINP

Exercice 23 (CCINP 1)

1) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n=\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right)-\tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 24 (CCINP 46- extrait)
Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1}=n\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\frac{\pi}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
En déduire un développement asymptotique à la précision $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ en $+\infty$.

IX Suites définies par des fonctions

Suites récurrentes

Exercice 1 (*)
Pour quels $u_0 \in \mathbf{R}$ la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1-u_n}$ existe-t-elle ?
Montrer qu'elle est alors périodique.

Exercice 2 (*)
On considère la suite u définie par $u_0 \in [0,1]$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n^2} = f(u_n)$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
2) Montrer que f admet un unique point fixe sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (dont on ne cherchera pas la valeur). On note ce point fixe ℓ.
3) Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 3 (**)
Étudier la suite définie par

$$u_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1 - \cos u_n.$$

Exercice 4 (**)
On définit la suite u par $u_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{1-u_n}}.$$

1) Montrer que la suite u est bien définie.
2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$. Montrer que la suite v est bien définie, et exprimer v_{n+1} en fonction de v_n
3) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 5 (**)
On considère la suite u définie par $u_0 \in]3,4[$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 4 - \frac{1}{4} \ln u_n = f(u_n).$$

Étude de la suite.

Exercice 6 (***)
On considère l'application f définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{1+x}}.$$

1) Étudier le domaine de définition de f.
2) On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que la suite est bien définie et étudier sa nature.

Exercice 7 (***) (Théorème du point fixe)
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème du point fixe de Banach-Picard.
Soit I un intervalle, et $f : I \to I$ une application contractante :

$$\exists k \in [0,\, 1[,\ \forall (x,\, y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant k\,|y-x|.$$

On considère la suite définie par

$$x_0 \in I,\ \forall n \in \mathbf{N},\ x_{n+1} = f(x_n).$$

1) Montrer que si f admet un point fixe sur I, alors il est unique.
2) (a) Montrer qu'il existe $M \in \mathbf{R}$ et $k < 1$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, |x_{n+p} - x_n| \leqslant k^n M.$$

(b) En déduire que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| \leqslant \varepsilon.$$

On dit que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy.

3) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.
4) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.
5) On note ℓ la limite de (x_n). Montrer que $\ell \in I$, alors $f(\ell) = \ell$.

Exercice 8 (***)

1) Si u est une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$, alors les valeurs d'adhérence de u forment un intervalle.
2) Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,\, b] \to [a,\, b]$ une fonction continue.
On considère la suite définie par

$$u_0 \in [a,\, b], \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Suites implicites

Exercice 9 (**)
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k.$$

1) Pour tout $n \geqslant 1$, montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}_+$ que l'on notera u_n.
2) En comparant $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, montrer que la suite u est monotone.
3) En déduire que la suite converge.

Exercice 10 (**)

1) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'équation d'inconnue x : $\tan(nx) = \dfrac{1}{2x}$ admet une unique solution sur$\left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$ notée x_n.
2) Montrer que $x_n \sim \dfrac{\pi}{2n}$.
3) Déterminer un équivalent simple de $x_n - \dfrac{\pi}{2n}$.

Exercice 11 (**)
Soit $n \geqslant 3$.

1) Montrer que l'équation $\mathrm{e}^x = x^n$ admet deux solutions sur $]0, +\infty[$, notées u_n et v_n et telles que $1 < u_n < \mathrm{e} < v_n$.
2) Déterminer un développement asymptotique à trois termes de la suite u.
3) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
4) Montrer que $v_n \sim n \ln n$.

Exercice 12 (***)
On considère la fonction

$$f \ : x \mapsto \frac{x \ln(x)}{x+1}.$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution notée α_n.
2) Démontrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha_n \geqslant \mathrm{e}^n$ puis que $\alpha_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^n$.
3) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit ε_n tel que $\alpha_n = \mathrm{e}^n(1 + \varepsilon_n)$.
Démontrer que $\varepsilon_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n\,\mathrm{e}^{-n}$.
En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha_n - \mathrm{e}^n \sim n$.

Exercice 13 (***)

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique solution $\alpha_n \in]0; 1]$.
2) Montrer que la suite (α_n) est croissante et converge vers 1.
3) Montrer que $\alpha_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + v_n$ avec $v_n = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Exercice 14 (***)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_n(x) = x^{n+1} - x^{n-1} + 1.$$

1) Dresser le tableau de variations de f_n, préciser le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 3 + \frac{1}{n}$.
2) On note x_n l'unique solution positive de l'équation précédente.
   (a) Déterminer x_1.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ x_n \geqslant 1$.
   (c) Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$
3) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
4) Déterminer le terme suivant du développement asymptotique de x_n.

Exercice 15 (**)
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x \cos^n(x). \end{array} \right.$$

1) Montrer que f_n admet un maximum atteint en un unique point $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge et calculer sa limite.
3) Trouver un équivalent de x_n en $+\infty$.
4) En déduire un équivalent de $f_n(x_n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 16 (**)
On considère une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n^5 + n u_n = 1.$$

1) Montrer que la suite est définie de manière unique.
2) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n en $+\infty$.

Exercice 17 (***)
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation

$$\mathrm{e}^x = n - x$$

admet une unique solution positive x_n.
Déterminer un développement asymptotique à trois termes de x_n.

Développement asymptotique

Exercice 18 (***)
On définit la suite u par $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.
Déterminer un développement asymptotique à trois termes de u_n.

Exercice 19 (Césaro)
On définit la suite u par $u_0 = 1$ et $\forall n \in N$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$.

1) Montrer que u est bien définie et diverge vers $+\infty$.
2) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1}^3 - u_n^3 = 3$.
3) En déduire, à l'aide de Césaro que $u_n^3 \sim 3n$.
4) Donner un équivalent de la suite u.

Exercices CCINP

Déjà vu dans le chapitre sur la convergence des suites.

Exercice 20 (CCINP 43)
Soit $x_0 \in \mathbf{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)$.

1) (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2) Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbf{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ h(x) = h\left(\mathrm{Arctan}\, x\right).$$

X Intégration sur un segment

Continuité uniforme

Exercice 1 (*)
À chaque fois, prouver le résultat.

1) Donner un exemple de fonction uniformément continue sur $\mathbf{R}$.
2) Donner un exemple de fonction qui est continue sans être uniformément continue sur $\mathbf{R}$.
3) Donner un exemple de fonction qui est continue sans être uniformément continue sur $]0, 1[$.

Exercice 2 (**)

1) Montrer qu'une fonction continue sur $[0, +\infty[$ qui admet une limite finie en $+\infty$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.
2) Trouver une fonction uniformément continue sur $[0, +\infty[$ qui n'admet pas de limite en $+\infty$.
3) Trouver une fonction uniformément continue sur $[0, +\infty[$ qui admet une limite infinie en $+\infty$.

Exercice 3 (***)
Soient $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^0\left([a, b[\right)$.

1) On suppose que f est prolongeable par continuité en b.
   Montrer que f est uniformément continue sur $[a, b[$.
2) Montrer que la réciproque est aussi vraie.

Intégrale sur un segment

Exercice 4 (*)
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$.
Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$, alors f admet un point fixe.

Exercice 5 (*)
On définit f sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ par

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que f est impaire.
2) Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ f(x) \leqslant x$.
3) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 6 (**)
On définit la fonction F par

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{3 - \cos(t)}.$$

1) Étudier la parité et la dérivabilité de F.
2) Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}, F(x + 2\pi) = F(x) + F(2\pi)$.
3) (a) En s'aidant du changement de variable $u = \tan(t/2)$, calculer $F(x)$ sur $]-\pi, \pi[$.
   (b) En déduire $F(2\pi)$.
   (c) Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 7 (**)
Soit

$$F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1 + \sin t}\,\mathrm{d}t.$$

1) Justifier la définition et la régularité de F sur $[0, \pi]$.
2) Calculer $F(x)$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
3) Calculer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
4) En utilisant un argument de symétrie, en déduire la valeur de $F(\pi)$.

Exercice 8 (*)
Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad 2f(x) = 3x \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 9 (**)
Déterminer toutes les fonctions continues $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ telles que,

$$\forall x\in\mathbf{R},\quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = xf(x).$$

Exercice 10 (***)
Soit $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ une fonction continue non identiquement nulle telle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

1) Montrer que f s'annule au moins une fois dans $]a,b[$.
2) On suppose de plus que $\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois dans $]a,b[$.
3) Soit P un polynôme tel que

$$\forall n\in\mathbf{N},\ \int_0^1 P(t)t^n\,\mathrm{d}t=0.$$

Montrer que $P=0$.

Limites

Exercice 11 (méthode)
Pour $n\in\mathbf{N}$, on pose

$$u_n=\int_0^1 \frac{t^n\,\mathrm{e}^t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.
2) Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}$,

$$u_n=\frac{\mathrm{e}}{2(n+1)}-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{t^{n+1}(1-t)^2\,\mathrm{e}^t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

3) En déduire un équivalent simple de u_n pour $n\to+\infty$.

Exercice 12
Montrer que

$$\int_0^1\frac{t^n}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(\mathrm{e}+1)}.$$

Exercice 13
Montrer que

$$\int_x^{x+1}\mathrm{e}^t\ln(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x\ln(x)\,(\mathrm{e}-1).$$

Exercice 14 (**)
On considère la fonction H définie sur $]1;+\infty[$ par $H(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1) Montrer que H est C^1 sur $]1;+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2) Montrer que la fonction u définie par $u(x)=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x=1$.
3) En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

Exercice 15 (***)
Soit $f\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}_+)$.
Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 16 (***)
Soit $f\in\mathscr{C}^0(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$ et F définie par

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que si f admet une limite ℓ en $+\infty$, alors F admet la même limite ℓ en $+\infty$.
2) Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$ et $F \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3) Montrer que si $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, alors $F(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

Exercice 17 (**)
Calculer les limites :

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$
2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$
3) $\displaystyle\lim_{a\to0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan(a\sin t)\,\mathrm{d}t.$

Sommes de Riemann

Exercice 18 (*)
Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}.$$

Exercice 19 (**)
Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 20 (***) (Intégrale de Poisson)
Soit $x > 1$, calculer

$$\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos t+x^2)\,\mathrm{d}t.$$

1) Réaliser le calcul avec les sommes de Riemann.

2) Autre méthode :

   (a) Montrer que f est paire.
   (b) Calculer pour $x \neq 0$, $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.
   (c) Montrer que pour $x > 0$, $f\left(x^2\right) = 2f(x)$.
   (d) En déduire la valeur de f en tout $x > 1$.

Formule de Taylor avec reste intégral

Exercice 21 (**)

1) Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.

Exercice 22 (**)
Montrer que :

1) $\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \ \mathrm{e}^x > \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

2) $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \operatorname{Arctan} x < x$.

3) $\forall x \in \mathbf{R},\ \sin x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.

Fonctions à valeurs complexes

Exercice 23 (*) (Lemme de Riemann-Lebesgue)
Soit $f \in \mathscr{C}^1([a, b], \mathbf{R})$.
Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Le « vrai » lemme est aussi valable pour des fonctions continues.

Exercice 24

1) Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbf{R})$.
   Montrer que $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$ si, et seulement si f est de signe constant sur $[a, b]$.

2) Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbf{C})$.
   À quelle condition a-t-on $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$?

XI Séries numériques

Calculs à la pelle

Exercice 1 (* → **)
Donner la nature de la série de terme général :

1) $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.
2) $\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.
3) $n^{-\ln(\ln n)}$.
4) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
5) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.
6) $\dfrac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.
7) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$.
8) $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-1$.

Exercice 2 (*)
Donner la nature de la série de terme général :

1) $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.
2) $\dfrac{\ln(n)}{n!}$.
3) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2i}{3}\right)^n$.
4) $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 3 (*)
Donner la nature de la série de terme général :

1) $\ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right)$.
2) $\dfrac{1}{n^{\operatorname{Arctan}(n)}}$.
3) $\dfrac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$.
4) $\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$.
5) $\dfrac{1+(-1)^n}{1+n}$.
6) $\dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$.
7) $(-1))^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.
8) $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 4
Pour $n\in\mathbf{N}$ et $x\in\mathbf{R}$, on pose $f_n(x)=\dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos\left(\sqrt{n}x\right)$.
Étudier la convergence de la série $\sum f_n(x)$ en fonction de x.

Méthode

Exercice 5 (*)
Montrer l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Exercice 6 (**)
À l'aide de la comparaison série intégrale, donner un équivalent en $+\infty$ de

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3$.
2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$.

Exercice 7 (Série harmonique)
On pose (H_n) la suite des sommes partielles associée à la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$.

1) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2) Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on pose $u_n=H_n-\ln(n)$. Montrer que $u_{n+1}-u_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
3) En déduire qu'il existe $\gamma\in\mathbf{R}$ tel que $H_n=\ln(n)+\gamma+o(1)$.

Avec des intégrales

Exercice 8 (**)
Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on pose

$$u_n=\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}(n+1)}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$.
2) Déterminer la nature des séries

$$\sum u_n,\ \sum\frac{u_n}{n}\ \text{et}\ \sum(-1)^n u_n.$$

3) Déterminer une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.
4) En déduire que pour tout $n\in\mathbf{N}$ $u_n=\dfrac{n!}{\mathrm{e}}\left(\mathrm{e}-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$.

Autour des séries alternées

Exercice 9 (**)

On propose de calculer explicitement $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Pour tout $x \in [0, 1]$, pour tout $N \in \mathbf{N}$, on pose $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.

1) Justifier que S est bien défini.
2) Déterminer une expression simple de S_N en fonction d'une intégrale.
3) En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
On évitera de passer à la limite « sous l'intégrale ».

Exercice 10 (**)
Suite de l'exercice précédent : une autre méthode.
Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
On rappelle que (S_N) est convergente (exercice précédent).
On rappelle également le résultat prouvé avec les suites :

$$H_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln(N) + \gamma + o(1)$$

avec $\gamma \in \mathbf{R}$, la constante d'Euler.

1) Exprimer S_{2N} en fonction de H_N et H_{2N}.
2) En déduire la limite de S_N quand N tend vers $+\infty$.

On a encore une autre méthode avec le chapitre d'intégration.

Exercice 11 (***)
Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
On définit φ sur $\mathbf{N}^*$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \varphi(3n-2) = 2n-1, \varphi(3n-1) = 4n-2 \text{ et } \varphi(3n) = 4n.$$

1) Montrer que φ est une permutation de $\mathbf{N}^*$.
2) Justifier l'existence de la somme et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$.

Exercice 12 (**)

1) Montrer que $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converge.
2) Donner une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telle que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

et $\sum u_n$ diverge.

Exercices théoriques

Exercice 13 (*)
Montrer que si $\sum(u_n + v_n)$ converge, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 14 (*)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\sum u_k$ converge.

Exercice 15 (*)
Soit (u_n) une suite réelle strictement positive.
Montrer que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Exercice 16 (*)
Donner un exemple d'une suite (u_n) positive non monotone telle que $\sum u_n$ converge.

Exercice 17 (**)
Montrer que si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n^2$ aussi.

Exercice 18 (**)
Soient (a_n) et (b_n) deux suites positives.

1) On suppose que $a_n = o(b_n)$.
   (a) Si $\sum b_n$ converge, montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$.
   (b) Si $\sum b_n$ diverge, montrer que $\sum_{k=1}^{n} a_k = o\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$.
2) Faire de même pour les suites équivalentes.

Exercice 19 (***)

Soit u une suite strictement positive. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $a_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
Montrer que si (a_n) bornée, alors il existe $s = \sup\{\text{valeurs d'adhérence de } a\}$ dans $\mathbf{R}_+$.

Montrer alors que pour $s \in [0,\, 1[$, $\sum u_n$ converge.

Familles sommables

Exercice 20 (*)

Soit $q \in \mathbf{C}$ avec $|q| < 1$.
Montrer que la famille $\left(q^{|n|}\right)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 21 (*)

Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}.$$

Exercice 22 (**)

1) Soit $p \geqslant 1$, montrer que

$$\sum_{n=1,\, n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{3}{4p^2}.$$

2) Calculer $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1,\,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}$ et comparer avec $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{p=1,\,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}$.
Que peut-on en déduire.

Exercice 23 (**)

Montrer que pour tout $x \in]-1,\, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$

où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 24 (*) (Mines)

Pour $k \geqslant 2$, on note $\zeta(k) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}$.
Étudier la convergence des séries $\sum\limits_{k\geqslant 2}(\zeta(k)-1)$ et $\sum\limits_{k\geqslant 2}(-1)^k(\zeta(k)-1)$ et calculer leur somme.

Entraînement

Exercice 25 (**)

Déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{\ln\left(\sqrt{n}+1\right)}.$$

Exercice 26 (**)

Soit u une suite décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

1) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
En considérant $S_{2n} - S_n$, montrer que $u_{2n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2) Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3) Le résultat est-il toujours vrai si u n'est pas supposée décroissante ?

Exercice 27 (**) (Séries de Bertrand)

Soient α et β deux réels. On appelle série de Bertrand, la série

$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}.$$

Étudier la nature de cette série.

Exercice 28 (***)

1) Soit u une suite réelle positive.
Montrer que si $\left(\sum\limits_{k=1}^{n^2-1} u_k\right)$ converge, alors la série $\sum u_k$ converge.

2) S'il y a convergence, calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k}$.

Exercice 29 (***)

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle décroissante, positive.
On pose $\forall n \in \mathbf{N},\quad v_n = 2^n u_{2^n}$.
Montrer que

$$\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \sum v_n \text{ converge.}$$

2) Application : étudier la convergence des séries $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ et $\sum \dfrac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$.

3) *Généralisation :* Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle décroissante, positive et $p \in \mathbf{N}$ tel que $p \geqslant 2$.
On pose $\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = p^n u_{p^n}$.
Montrer que

$$\sum u_n \text{ converge si, et seulement si } \sum v_n \text{ converge.}$$

Exercice 30 (***)
Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+^*)$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.

1) Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge.

2) Donner un équivalent du reste $R_{n_0-1} = \sum\limits_{k=n_0}^{+\infty} f(k)$.

Exercice 31 (***)
Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 + x^2}$ sous réserve de convergence.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Trouver un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$?

Exercice 32 (***)
Soit (a_n) une suite bornée telle que

$$\forall p \geqslant 2, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p} = 0.$$

Montrer que (a_n) est la suite nulle.

Exercice 33
Soit σ une bijection de $\mathbf{N}^*$ dans lui-même. Déterminer la nature de :

1) (*) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sigma(n)^2}$.

2) (**) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sigma(n)}$.

3) (***) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n\sigma(n)}$.

4) (***) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice 34 (***)
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On veut montrer que $\sum\limits_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

Par l'absurde, on suppose qu'elle converge.
On écrit les nombres premiers par ordre croissant $(p_i)_{i\in\mathbf{N}}$.

1) Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{N}$, tel que

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}.$$

2) Soit $N \in \mathbf{N}^*$, on note $N_s = \operatorname{Card}\{n \in [\![1, N]\!], \exists p_i \geqslant k+1, p_i | n\}$ et $N_i = N - N_s$.
Montrer que $N_s < \frac{N}{2}$.

3) Montrer que $N_i \leqslant 2^k\sqrt{N}$. *Pour $n \in [\![1, N]\!]$ tel que $\forall i \geqslant k+1$, $p_i \not| n$, on pourra noter $n = a_n b_n^2$, avec a_n le facteur sans carrés dans la décomposition en facteurs premiers.*

4) Conclure.

Preuve due à Erdòs.

Exercices CCINP

Exercice 35 (CCINP 5)

1) On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.

   (a) **Cas $\alpha \leqslant 0$**

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas $\alpha > 0$**

   Étudier la nature de la série.
   Indication: on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2) Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Exercice 36 (CCINP 6)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1) Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication: écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n}$?

Exercice 37 (CCINP 7)

1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
   (a) Prouver que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
   (b) Dans cette question on suppose que (v_n) est positive.
   Prouver que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2) Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{((-1)^n + \mathrm{i})\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\ln n}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

   Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Exercice 38 (CCINP 8 - simplifié)

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.
   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

2) On pose : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n \,\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.
   Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ en fonction de x.

Exercice 39 (CCINP 17-extrait)
On pose:
$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f_n(x) = nx^2\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}.$$

Déterminer les valeurs de $x \in \mathbf{R}$ pour lesquelles la série $\sum f_n(x)$ converge.

Exercice 40 (CCINP 46)
On considère la série: $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

2) En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

3) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

XII Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 (Ouverts)

1) Montrer que toute union d'ouverts est encore un ouvert.
2) Montrer que toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
3) Trouver une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.
   Indication : s'inspirer des ouverts de $\mathbf{R}$.

Exercice 2 (**)
Montrer qu'une fonction f est continue si, et seulement si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.

Exercice 3 (*)
Représenter graphiquement le domaine de définition de la fonction

1) $f : (x, y) \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$
2) $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - y^2}$
3) $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - y}$
4) $f : (x, y) \mapsto \sqrt{xy}$
5) $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{x^2 + y^2 + xy}$

Exercice 4 (*)
Étudier les extrema locaux des fonctions suivantes (sur leur domaine de définition)

1) $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$
2) $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$
3) $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$
4) $f : (x, y) \mapsto x^4$
5) $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2y^2 + 1}$
6) $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2y^2 + 4(x - y) + 3}$
7) $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 9xy$

Exercice 5 (*)
Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ et $g\ : t \mapsto f\left(2 + 2t,\, t^2\right)$.

1) Démontrer que $g \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R})$.
2) Calculer la dérivée de g en fonction des dérivées partielles de f.
3) Soit $h\ : (u,\, v) \mapsto f\left(uv,\, u^2 + v^2\right)$.
   Montrer que $h \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.

Exercice 6 (**)
On veut déterminer l'existence et l'équation de la droite de régression linéaire à partir de sa caractérisation :
« la droite $f(x) = ax + b$ qui minimise la somme des carrés des distances entre les points (x_i, y_i) et les points $(x_i, f(x_i))$ pour i décrivant l'échantillon fini. »

1) À l'aide des fonctions de deux variables, obtenir l'existence et l'expression de cette droite.
   On admettra que si une fonction $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est continue sur une boule fermée, alors elle admet un maximum et un minimum sur cette boule.
2) Retrouver le résultat par un raisonnement d'algèbre.

Exercice 7 (**)
Soit f définie sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,\, 0)\}$ par

$$f(x,\, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}}}.$$

Justifier que f est prolongeable par continuité en $(0,\, 0)$ et étudier l'existence de dérivées partielles en $(0,\, 0)$ de la prolongée.

Exercice 8 (*)
On considère la demi-sphère ouverte supérieure de $\mathbf{R}^3$ de rayon $R > 0$ telle que $z > 0$.

1) Déterminer une paramétrisation sous la forme $z = f(x,\, y)$ avec $f \in \mathscr{C}^1$ sur un ouvert à préciser.
2) Montrer qu'on trouve bien que $(0,\, 0)$ est l'unique maximum (local et global) de cette surface.
3) En s'aidant du gradient, retrouver que les plans tangents sont orthogonaux aux rayons (des points pour lesquels sont définis les plans tangents).

Exercice 9 (CCINP 33)
On pose : $\forall\,(x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f\,(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f\,(0,0)=0$.

1) Démontrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.

2) Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbf{R}^2$.

3) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$? Justifier.

Exercice 10 (CCINP 52)
Soit $\alpha\in\mathbf{R}$.
On considère l'application définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) Prouver que : $\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ x^2+y^2-xy\geqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

2) (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbf{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbf{R}^2$.

3) Dans cette question, on suppose que $\alpha=0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbf{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$?

Exercice 11 (CCINP 56)
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $\forall(x,\,y)\in\mathbf{R}^2,\ f(x,\,y)=2x^3+6xy-3y^2+2$.

1) f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbf{R}^2$? Si oui, les déterminer.

2) f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbf{R}^2$? Justifier.

3) On pose $K=[0,\,1]\times[0,\,1]$.
   Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

Exercice 12 (CCINP 57)

1) Soit f une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de «f différentiable en $(0,0)$».

2) On considère l'application définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

3– Algèbre

I Arithmétique

Pour commencer

Exercice 1 (*)
En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer les PGCD des nombres suivants :

1) 3465 et 1764.
2) 4310 et 1755

Exercice 2 (*)

1) Décomposer en facteurs premiers 588.
2) Décomposer en facteurs premiers 525.

Exercice 3 (*)

1) Donner le reste de la division euclidienne de 5^{2001} par 6.
2) Donner le reste de la division euclidienne de $3^{80} + 50^{90}$ par 17.
3) Montrer que 7 divise $3245^{495} - 1$.
4) Calculer le reste de 91^{94} modulo 3 et modulo 4.
   En déduire le reste modulo 12.

Exercice 4 (*)
Résoudre l'équation d'inconnues $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$: $7x - 12y = 3$.

Exercice 5 (*)
Démontrer le lemme de Gauss avec les valuation p-adiques.
Exercice formel : pour établir le théorème de décomposition et donc les valuations $p-$adiques, on a besoin du lemme de Gauss...

Exercice 6 (*)
Démontrer, en utilisant les valuations p-adiques que $a|b$ et $a'|b$ avec $a \wedge a' = 1$, implique que $aa'|b$.

Exercice 7 ((*))**

1) Trouver deux entiers $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $a \wedge b = 12$ et $a \vee b = 60$.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur d et m entiers naturels non nuls pour que le système d'équations $a \wedge b = d$ et $a \vee b = m$ d'inconnues a et b admette au moins une solution.
3) Déterminer en fonction de d et m dans $\mathbf{N}^*$, le nombre de solutions du système $a \wedge b = d$ et $a \vee b = m$.

Exercice 8 (*)
Résoudre $\begin{cases} n \equiv 27\ [11] \\ n \equiv 4\ [7] \end{cases}$.

Exercice 9 (*)

1) *Passage aux sous-familles.*
   (a) Montrer que si $(a_1, \cdots a_n) \in \mathbf{Z}^n$ forme une famille d'entiers premiers entre eux deux à deux, alors, pour toute sous famille, les entiers sont encore premiers deux à deux entre eux.
   (b) Montrer par contre, que s'ils sont premiers entre eux dans leur ensemble, alors il peut exister des sous-familles où les entiers ne sont pas premiers entre eux dans leur ensemble.
2) Réfléchir aux énoncés correspondants pour des familles *complétées.*

Exercice 10 (**)
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n^5 - 5n^3 + 4n$ est divisible par 120.

ENTRAÎNEMENT

Exercice 11 (*)
Résoudre pour $n \in \mathbf{N},\ 3 \times 4^n \equiv -2\ [11]$.

Exercice 12 (*)
Montrer que $a^2|b^2 \Rightarrow a|b$.

Exercice 13 (*)
Soit $a \in \mathbf{Z}$. Montrer que $a^2 \not\equiv 3\ [4]$.

Exercice 14 (*)
Montrer que pour tout entier naturel n, $2^{4n+1} + 3^{4n+1} \equiv 0\ [5]$.

Exercice 15 (**)
Rédoudre dans $\mathbf{Z}^2,\ x^2 - 7y^2 = 3$.

Exercice 16 (**)

1) Justifier la règle : « un nombre est divisible par 3 si, et seulement si la somme de ses chiffres est également divisible par 3 ».
2) Montrer que la même règle s'applique avec 9.
3) Une telle règle s'applique-t-elle avec 7 ?

Exercice 17 (**)
Soit $a = \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}$ avec les p_k des nombres premiers deux à deux distincts
et $\forall k \in [\![1,\ n]\!]$, $\alpha_k \in \mathbf{N}^*$.
Déterminer le nombre de diviseurs entiers naturels de a.

Exercice 18 (**)
Soit $(a, n) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ tel que $n \geqslant 2$. Notons $d = a \wedge n$.
Montrer que ad divise $(a+1)^n - 1$.

Exercice 19 (**) (Nombres de Mersenne $M_n = 2^n - 1$)
Soit $n \geqslant 2$.

1) Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
Remarque : La réciproque est fausse, $2^{11} - 1 = 23 \times 89$.
2) Plus généralement, soit $a \geqslant 2$.
Montrer que si $a^n - 1$ est premier impair, alors $a = 2$ et n est premier.

Exercice 20 (**) (Nombres de Fermat)
Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit $F_n = 2^{2^n} + 1$ le n-ième nombre de Fermat.

1) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que $F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k$.
2) Montrer que deux nombres de Fermat distincts, sont premiers entre eux.

Exercice 21 (**)
Soit $s \in \mathbf{N}^*,$ on note $n_s = \sum_{k=0}^{s-1} 10^k = 11\cdots1$.

1) On suppose que n_s est premier, montrer alors que s est premier.
2) Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 22 (***)
On considère la suite de Fibonacci définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$.
2) En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \wedge u_{n+1} = 1$.
3) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, \forall m \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+m} = u_m u_{n+1} + u_{m-1} u_n$.
4) Montrer que pour tout $(m,\ n) \in (\mathbf{N}^*)^2,\ u_m \wedge u_n = u_{m \wedge n}$.
Utiliser l'algorithme d'Euclide.

Approfondissement

Exercice 23 (***)
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Exercice 24 (***)
Déterminer 2000 nombres non premiers consécutifs.

Exercice 25 (***)
On considère l'équation

$$(E)\ :\qquad X^2+Y^2=Z^2 \quad \text{dans} \quad \mathbf{N}^3.$$

1) On suppose que Y et Z sont de même parité et que X, Y, Z sont premiers entre eux deux à deux.
Montrer que les solutions (quitte à échanger X et Y) sont nécessairement les nombres de la forme :

$$X=2ab,\quad Y=a^2-b^2,\quad Z=a^2+b^2 \quad \text{avec } a\wedge b=1.$$

2) Résoudre (E).

Exercices CCINP

Exercice 26 (CCINP 86)

1) Soit $(a,b,p)\in\mathbf{Z}^3$. Prouver que : si $p\wedge a=1$ et $p\wedge b=1$, alors $p\wedge(ab)=1$.

2) Soit p un nombre premier.

   (a) Prouver que $\forall k\in[\![1,p-1]\!]$, p divise $\dbinom{p}{k}k!$
   puis en déduire que p divise $\dbinom{p}{k}$.

   (b) Prouver que: $\forall n\in\mathbf{N},\ n^p\equiv n \mod p$.
   Indication: procéder par récurrence.

   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \iff n^{p-1}\equiv 1 \mod p$.

Exercice 27 (CCINP 94)

1) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbf{Z}$.

2) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
Soit $c\in\mathbf{Z}$. Prouver que: $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.

3) On considère le système (S): $\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 6 \quad [17] \\ x & \equiv & 4 \quad [15] \end{array}\right.$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbf{Z}$.

   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbf{Z}$.

   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbf{Z}$ du système (S).

Exercice 28 (CCINP 94 - version 2025)

1) En raisonnant par l'absurde, montrer que la système (S): $\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 5 \quad [6] \\ x & \equiv & 4 \quad [8] \end{array}\right.$ n'a pas de solution x appartenant à $\mathbf{Z}$.

2) (a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbf{Z}$.

   (b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
   Soit $c\in\mathbf{N}$. Prouver que: $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.

3) On considère le système (S): $\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 6 \quad [17] \\ x & \equiv & 5 \quad [16] \\ x & \equiv & 4 \quad [15] \end{array}\right.$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbf{Z}$.

   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbf{Z}$.

   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbf{Z}$ du système (S).
   On exprimera les solutions en fonction de la solution particulière x_0.

II Polynômes à une indéterminée

Manipulations algébriques

Exercice 1 (*)
Calculer les produits de P et Q.

1) $P = 1 + X + 3X^2 - X^5$ et $Q = X$.
2) $P = 1 + X + 3X^2 - X^5$ et $Q = X + X^2 - X^4$.
3) $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$ et $Q = X - 1$.

Exercice 2 (*)
Effectuer la division euclidienne de P par Q pour

1) $P = 5X^5 + X^4 + 2X^3 - 1$ et $Q = X^2 + X - 1$.
2) $P = X^7$ et $Q = X^3 - X + 1$.

Exercice 3 (**)
Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, et $a \neq b$.
Donner le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
Que peut-on dire du cas $a = b$?

Exercice 4 (**)
Déterminer tous les polynômes P de degré 3 tel que $(X-1)|P$ et tel que les restes des divisions euclidiennes par $X-2$, par $X-3$ et par $X-4$ soient les mêmes.

Exercice 5 (**)

1) À l'aide du polynôme $P = (1+X)^n$, montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \in [\![1, n]\!], \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
2) À l'aide du polynôme $P = (1+X)^{2n}$, montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$
3) Montrer que $\forall (m, n, p) \in \mathbf{N}^3, \ \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$

Racines et factorisation

Exercice 6 (*)
Factoriser sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$ en produit d'irréductibles.

1) $P_1 = X^3 - X^2 - 2X$.
2) $P_2 = X^8 - 3X^7 + 4X^6 - 5X^5 + 4X^4 - X^3 + X - 1$.
3) $P_3 = X^7 - X^2$.
4) $P_4 = 2X^4 - 10X^3 + 24X^2 - 28X + 16$.
   Indication : on sait que $(1+i)$ est racine.
5) $P_5 = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$.
6) $P_6 = X^4 - 2X^3 + 4X^2 + 2X - 5$.
7) $P_7 = X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$.

Exercice 7 (*)
Factoriser sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$ en produit d'irréductibles.
$$P_8 = X^4 - X^2 + 1.$$

Exercice 8 (**) (À connaître)
Montrer que tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré 3 admet au moins une racine réelle.

Exercice 9 (**)
On considère le polynôme
$$P = (X+1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1.$$

1) Montrer que $X^2 + X$ divise P.
2) Est-ce que (-1) est racine double de P ?

Exercice 10 (*)
Soit $\alpha \in \mathbf{K}$ et $P \in \mathbf{K}[X]$.
Montrer que α racine double de P si, et seulement si α est racine simple de $P \wedge P'$.

Exercice 11 (**)

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbf{C}[X]$$

avec $a \neq 0$ et de racines x, y, z.

1) Exprimer $x+y+z$, $xy+xz+yz$ et xyz en fonction de a, b, c, d.

2) Résoudre dans $\mathbf{C}^3$ les systèmes suivants :
$$(1)\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=2 \\ xyz=0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{6} \end{cases}.$$

Exercice 12 (**)
Soient $P \in \mathbf{C}[X]$ et $n \in \mathbf{N}$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X-1$, alors il l'est aussi par $X^n - 1$.

Exercice 13 (**) (méthode... et digressions)
Un polynôme non nul est dit *palindrome* si ses coefficients sont symétriques :
Si $\deg P = n$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors

$$\forall k \in [\![0,\, n]\!],\ a_k = a_{n-k}.$$

1) Montrer que P de degré n est palindrome si, et seulement si $\forall x \neq 0$,
$$P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right).$$

2) Montrer que si P est palindrome et $\deg P$ est impair, alors on peut écrire $P = (X+1)Q$ avec Q un polynôme palindrome.

3) Factoriser $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ en produit d'irréductibles.
Méthode : Pour P palindrome de degré $2n$, on admet que l'on peut trouver un polynôme Q de degré n tel que
$$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ P(x) = x^n Q\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

4) Montrer que l'ensemble des polynômes palindromes est stable par produit.

5) Montrer que si 1 est racine d'un polynôme palindrome, alors il est au moins racine double.

6) Plus généralement, montrer que la multiplicité de 1 dans un polynome palindrome est nécessairement paire.

Fonctions polynomiales

Exercice 14 (*)
Pour chacune des fonctions suivantes (éventuellement prolongée par continuité), dire si elle est polynomiale et le justifier.

1) $f : x \mapsto \cos x$

2) $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$

3) $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^{2016} - (1-x)^{2016}}{x}$

4) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Équations de polynômes

Exercice 15 (*)
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbf{K}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.

Exercice 16 (**)
Résoudre les équations suivantes d'inconnue $P \in \mathbf{R}[X]$.

1) $P = P'P''$.

2) $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

3) $(P')^2 = 4P$.

Exercice 17
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que

$$(X+4)P(X) = XP(X+1).$$

Exercice 18 (**)
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ P(x) \in \mathbf{R}.$$

Exercice 19 (***)
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que P' divise P.

Matrices

Exercice 20 (**)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $(A - 6I)(A^2 - 3I) = 0$.
On dit que $P = (X - 6)(X^2 - 3)$ est un polynôme annulateur de A.

2) Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer A^n.

Entraînement

Exercice 21 (*)
On définit une suite de polynômes (P_n) par

$$P_0 = 1,\ P_1 = X \text{ et } \forall n \geqslant 0, \qquad P_{n+2} + P_n = 2XP_{n+1}.$$

1) Calculer P_2 et P_3.

2) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.

3) Déterminer la parité de P_n.
Calculer $P_n(1)$, puis $P_n(-1)$.

Exercice 22 (**)
Soit $n \geqslant 2$ et $\xi = \mathrm{e}^{2i\frac{\pi}{n}}$.

1) Montrer que $\forall z \in \mathbf{C}$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(z - \xi^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

2) En déduire

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(k\frac{\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 23 (**)
Soit $P \in \mathbf{K}[X]$.

1) Montrer que pour tout $a \in \mathbf{K}$,

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} P^{(k)}(X).$$

2) Déterminer tous les polynômes dans $\mathbf{R}[X]$ qui vérifient

$$P(X+1) - 2P(X) + P(X-1) = 0.$$

Exercice 24 (**)
Soient A et B, deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$ premiers entre eux.
Soient a et b appartenant à $\mathbf{K}$, distincts.

1) Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P + a$ soit divisible par A et $P + b$ soit divisible par B.

2) Application numérique : $A = X^2 + 1$, $B = X^3 + 1$, $a = 1$ et $b = -1$.

Exercice 25 (**)
Soient p et q deux entiers supérieurs à deux et premiers entre eux.
Montrer que

$$(X^p - 1)\,(X^q - 1) \,|\, (X - 1)\,(X^{pq} - 1)\,.$$

Exercice 26 (**)
À quelle condition $P = X^3 + pX + q$ admet-il une racine multiple dans $\mathbf{C}$?

Exercice 27 (**)
Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![1,\, n+1]\!]$, $P(k) = \frac{1}{k}$.
Calculer $P(0)$.

Exercice 28 (***)
Pour quelles valeurs de $a \in \mathbf{R}$, le polynôme

$$P = (a+3)X^3 - aX^2 - (a+2)X + a$$

admet-il une racine complexe de module 1.

Exercice 29 (***)
Trouver tous les polynômes non nuls $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que

$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

Exercice 30 (***)
Soit $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbf{N}$.

On définit la fonction cotangente par $\operatorname{cotan}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ lorsque cela est défini.

1) Montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que
$$\sin((2n+1)\theta) = (\sin\theta)^{2n+1} P_n(\operatorname{cotan}^2\theta).$$

2) Expliciter P_n.

3) (a) Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ est racine de P_n.
   (b) Montrer que P_n est scindé sur $\mathbf{R}$.

4) En déduire que
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

5) (a) Vérifier que pour tout $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,
$$0 < \sin a < a < \tan a.$$
   (b) Calculer $1 + \operatorname{cotan}^2 a$ en fonction de $\sin a$.
   (c) En déduire que pour tout $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,
$$\operatorname{cotan}^2 a < \frac{1}{a^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2 a.$$

6) Montrer la limite :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercices CCINP

Exercice 31 (CCINP 85)
Formulation adaptée pour le début de la MPSI

1) Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $P \in \mathbf{R}_n[X]$ et $a \in \mathbf{R}$.
   (a) Énoncer sans démonstration la formule de Taylor au point a.
   (b) Soit $r \in \mathbf{N}^*$. En déduire que :
   $(X-a)^r | P$ et $(X-a)^{r+1} \nmid P$ si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.

2) Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 32 (CCINP 87)
Formulation adaptée pour le début de la MPSI
Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
   Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_k \in \mathbf{K}_n[X]$ vérifiant
$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ L_k(a_i)) = \delta_{i,j}.$$

2) Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ vérifiant
$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$

3) Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

III Fractions rationnelles

Calculs

Exercice 1 (*)
Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$

1) $F_1 = \dfrac{X^3}{(X-1)(X+2)}$.

2) $F_2 = \dfrac{X^5+1}{X(X-1)}$.

3) $F_3 = \dfrac{1}{(X-1)^2(X+2)^2}$.

Exercice 2 (*)
Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$

1) $F_2 = \dfrac{X^2}{(X^2-1)(X^2+1)}$.

2) $F_3 = \dfrac{X^4+1}{X^2-1}$.

3) $F_4 = \dfrac{X^3}{(X^4+X^2+1)}$.

Exercice 3 (**)
Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$.

2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{4-\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3(t)}$.

Entraînement

Exercice 4 (**)
Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ scindé à racines simples (et non nulles) sur $\mathbf{R}$.
On suppose $\deg P = n$ et on note $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ ses racines.
Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}.$$

Exercice 5 (***)
Soit P un polynôme de degré n dans $\mathbf{C}[X]$, $a \in \mathbf{C}$ une racine simple et $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ ses autres racines (non nécessairement distinctes).
On note $y_1, \cdots y_{n-1}$ les racines de P'.
Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a-x_k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a-y_k}.$$

Exercice 6 (***)
Soient $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$, $n-1$ réels strictement positifs et A_n quelconque.
Soient n-réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.
On pose

$$F = \frac{A_1}{X-a_1} + \frac{A_2}{X-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{X-a_n}.$$

On note sa forme irréductible $\frac{P}{Q}$.

1) Montrer que $\deg P \leqslant n-1$.

2) Montrer que toutes les racines de P sont réelles.

IV Structures algébriques

Groupes et sous-groupes

Facile

Exercice 1 (*)
Montrer que $\left\{p\sqrt{2}+q\sqrt{3},\ (p,\,q)\in\mathbf{Z}^2\right\}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{R},\,+)$.

Exercice 2 (*)
Soit $(G,\star)$ un groupe et $a\in G$.
Montrer que $E=\left\{a\star g\star a^{-1},\ g\in G\right\}$ est un sous-groupe de G.

Exercice 3 (*)
Soit X un ensemble non vide, et $x\in X$.
Montrer que $\mathrm{Fix}(x)=\{\sigma\in S_X,\ \sigma(x)=x\}$ est un sous-groupe de S_X.

Exercice 4 (*)
Soient $(G_1,\,\star_1)$ et $(G_2,\,\star_2)$ deux groupes.
On pose $G=G_1\times G_2$ et pour tout $(g_1,\,g_1'),\,(g_2,\,g_2')\in G$, on note

$$(g_1,\,g_2)\star(g_1',\,g_2'))=(g_1\star_1 g_1',\,g_2\star_2 g_2')\,.$$

Montrer que $(G,\,\star)$ est un groupe.

Union-intersection

Exercice 5 (*)
Soit G un groupe. On considère (G_i) une famille de sous-groupes de G.
Montrer que $\bigcap\limits_{i\in I} G_i$ est un sous-groupe de G.

Exercice 6 (**)
Soit G un groupe et $G_1,\,G_2$ deux sous-groupes de G.
Montrer que $G_1\cup G_2$ est un groupe si, et seulement si $G_1\subset G_2$ ou $G_2\subset G_1$.

Exercice 7 (**)
Montrer que $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}^*}\mathbf{U}_n,\ \times\right)$ est un groupe.

Arithmétique

Exercice 8 (**) (Incontournable)

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $n\mathbf{Z}=\{nk,\ k\in\mathbf{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$.
2) Montrer que tout sous-groupe de $\mathbf{Z}$ est de la forme $n\mathbf{Z}$ pour un certain $n\in\mathbf{N}$.
3) Montrer que pour $(d,\,d')\in\mathbf{N}^2$, $d|d'\iff d'\mathbf{Z}\subset d\mathbf{Z}$.
4) (a) Montrer que pour tout $(a,\,b)\in\mathbf{Z}^2$, $a\mathbf{Z}+b\mathbf{Z}=\left\{ak+bk',\ (k,\,k')\in\mathbf{Z}^2\right\}$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$.
   (b) En déduire qu'il existe $d\in\mathbf{N}$ tel que $a\mathbf{Z}+b\mathbf{Z}=d\mathbf{Z}$.
   (c) Montrer que si $(a,\,b)\neq(0,\,0)$, $d=a\wedge b$.
5) Montrer que pour tout $(a,\,b)\in(\mathbf{Z}^*)^2$, il existe $m\in\mathbf{N}$ tel que $m\mathbf{Z}=a\mathbf{Z}\cap b\mathbf{Z}$.
   Montrer que $m=a\vee b$.

Anneaux-corps

Exercice 9 (*)

1) Montrer que tout sous-anneau de $(\mathbf{R},\,+,\,\times)$ contient $\mathbf{Z}$.
2) Montrer que tout sous-corps de $(\mathbf{R},\,+,\,\times)$ contient $\mathbf{Q}$.
3) Déterminer les sous-corps de $(\mathbf{Q},\,+,\,\times)$.

Exercice 10 (**)
On note $\mathbf{Z}[i]=\left\{a+ib,\ (a,\,b)\in\mathbf{Z}^2\right\}$ l'ensemble des *entiers de Gauss.*

1) Montrer que $\mathbf{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbf{C}$.
2) Déterminer les inversibles de $\mathbf{Z}[i]$.
   On pourra s'aider du module.
3) Un entier de Gauss a est irréductible si pour tout $(b,\,c)\in(\mathbf{Z}[i])^2$,

$$a=bc\Rightarrow b \text{ ou } c \text{ inversible.}$$

   2 est-il irréductible ?

Exercice 11 (**)
Déterminer tous les endomorphismes d'anneau de $\mathbf{Q}$.

Exercice 12 (**)
On note $\mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2},\ (a,\, b) \in \mathbf{Q}^2\right\}$.

1) Montrer que $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ est un corps.

2) Déterminer tous les endomorphismes d'anneau de $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$.

Exercice 13 (Suite du précédent)

1) Soit $x \notin \left\{u^2,\ u \in \mathbf{Q}\right\}$.
   Montrer que $K = \{a + b\sqrt{x},\ (a, b) \in \mathbf{Q}^2\}$ est un corps.

2) Déterminer les morphismes d'anneaux de K dans lui-même.

3) *En déduire* que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $k = (3+\sqrt{7})^n + (3-\sqrt{7})^n \in \mathbf{Q}$.

4) Adapter la preuve pour montrer que $k \in \mathbf{Z}$.

5) Proposer aussi une autre preuve de ce résultat.

Exercice 14 (***)
Soit A un anneau.
$x \in A$ est dit nilpotent, s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $x^n = 0$.

1) Déterminer les éléments nilpotents d'un anneau intègre.

2) Montrer que si $x \in A$ est nilpotent, alors $-x$ aussi.

3) Pour $(x,\, y) \in A^2$, montrer que si xy est nilpotent alors yx l'est aussi.

4) Pour $(x,\, y) \in A^2$ deux éléments nilpotents qui commutent.
   Montrer que $(x + y)$ est aussi nilpotent.

5) Soit $x \in A$ nilpotent. Montrer que $1 - x$ est inversible, et calculer son inverse.

Exercice 15 (***) (Froebenius)
Soit A un anneau commutatif.

1) Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $\phi\ : \mathbf{Z} \to A$.

2) Montrer que $\ker(\phi)$ est de la forme $n\mathbf{Z}$ avec $n \in \mathbf{N}$.
   On appelle n la caractéristique de l'anneau A.

3) Soit A de caractéristique p avec p un nombre premier.
   Montrer que $a \mapsto a^p$ définit un endomorphisme d'anneaux.

Approfondissement

Exercice 16 (Anciennement CCINP 66)
On note p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère dans $\mathbf{Z}$ la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie par :

$$x \mathscr{R} y \overset{\text{déf.}}{\Rightarrow} \exists k \in \mathbf{Z} \text{tel que } x - y = kp.$$

On note $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation $\mathscr{R}$.

1) Quelle est la classe d'équivalence de 0 ? Quelle est celle de p ?

2) Donner soigneusement la définition de l'addition usuelle et de la multiplication usuelle dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
   On justifiera que ces définitions sont cohérentes.

3) On admet que, muni de ces opérations, $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un anneau.
   Démontrer que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier.

Exercice 17 (**)
Soit G un groupe multiplicatif de cardinal pair et d'élément neutre e.

1) Montrer que la relation définie par

$$\forall (x,\, y) \in G^2,\ x\mathscr{R}y \iff \left(x = y \text{ ou } x = y^{-1}\right)$$

   définit une relation d'équivalence sur G.

2) Montrer qu'il existe au moins un élément $x \in G$ et différent de l'élément neutre tel que $x^2 = e$. *On dit que x est d'ordre* 2.

Exercice 18 (***)
Soit G un ensemble fini non vide muni d'une loi $\star$ interne et associative.
On suppose que tous les éléments de G sont réguliers.
Montrer que G est un groupe.

Exercice 19 (**)
Pour $(x,\, y) \in \mathbf{R}^2$, on pose

$$x \star y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}.$$

1) Montrer que $\sqrt{1 + (x \star y)^2} = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy$.

2) Montrer que $(\mathbf{R},\, \star)$ est un groupe.

3) Montrer que sh réalise un isomorphisme de $(\mathbf{R},\, +)$ sur $(\mathbf{R},\, \star)$.

Exercice 20 (***)
Soit E un ensemble non vide muni d'une loi $\star$ interne, associative et possédant un élément neutre e.
Soit $a \in E$ et $f : \begin{cases} E & \to & E \\ x & \mapsto & a \star x. \end{cases}$
Montrer que a admet un symétrique dans E si, et seulement si f est bijective.

Exercice 21 (**)
Soit φ un morphisme d'un groupe fini $(G, \star)$ vers $(\mathbf{C}^*, \times)$.
On suppose que φ n'est pas une application constante. Calculer

$$u = \sum_{x \in G} \varphi(x).$$

Exercice 22 (* *) (Théorème du rang)**
Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes, avec G groupe fini. Montrer que

$$|\ker f|\,|\mathrm{Im}\, f| = |G|.$$

$|F|$ désigne le cardinal de l'ensemble F, c'est-à-dire son nombre d'éléments. On rappelle (?) que deux ensembles finis en bijection ont le même nombre d'éléments.

4– Algèbre linéaire

I Systèmes linéaires

Systèmes simples

Exercice 1 (*)
Résoudre le système d'équations :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{llllll} x_1 & +2x_2 & & & +5x_5 & =0 \\ & & x_3 & & -2x_5 & =0 \\ & & & x_4 & +x_5 & =0 \end{array}\right.$$

Exercice 2 (*)

1) Résoudre le système linéaire suivant.

$$\left\{\begin{array}{lllll} & -3y & & +t & =0 \\ x & +5y & +2z & -t & =0 \\ 3x & +y & +3z & -3t & =0 \end{array}\right.$$

2) Sans calculs supplémentaires, résoudre

$$\left\{\begin{array}{llll} & -3y & & =1 \\ x & +5y & +2z & =-1 \\ 3x & +y & +3z & =-3 \end{array}\right.$$

Exercice 3 (*)
Résoudre les systèmes suivants et interpréter géométriquement les solutions :

1) $\left\{\begin{array}{ll} x+2y+z & =2 \\ 2x+4y+2z & =1 \\ 2x+4y+z & =3 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{ll} x+y+z & =0 \\ x-y+z & =0 \\ x+y-z & =0 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{ll} x-y-2z & =1 \\ x+2y-z & =3 \\ -x+4y+3z & =1 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{ll} x+y+z & =1 \\ x-y+z & =2 \\ x+y-z & =3 \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{ll} x+2y+4z & =1 \\ 2x+2y+z & =2 \\ x+y-z & =1 \end{array}\right.$

6) $\left\{\begin{array}{ll} x+2y-z & =1 \\ x+2y+z & =2 \\ 2x+4y+z & =3 \end{array}\right.$

Exercice 4 (*)
Résoudre et interpréter géométriquement les solutions :

1) $\left\{\begin{array}{llllll} & 2x_2 & -2x_3 & +3x_4 & +x_5 & =0 \\ x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +3x_4 & & =0 \\ 2x_1 & +4x_2 & -3x_3 & +6x_4 & +4x_5 & =0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +4x_4 & +6x_5 & =0 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ 2x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +2x_4 & =0 \\ -x_1 & -3x_2 & -2x_3 & -2x_4 & =0 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & & =0 \end{array}\right.$

Exercice 5 (*)
Trouver toutes les fonctions polynomiales f du second degré dont la courbe passe par

le point $(-\frac{1}{2}, 3)$ et telles que
$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -3.$$

Exercice 6 (**)
Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n = 1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 1 \end{cases}$$

Systèmes à paramètres

Exercice 7 (**)
Décrire la nature géométrique de l'espace des solutions en fonction de la valeur du paramètre m.
Donner l'ensemble des solutions lorsque ce n'est pas un singleton.

$$\begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^3z = -1. \end{cases}$$

Exercice 8 (**)
Étudier l'existence de solutions des systèmes en fonction des valeurs des paramètres réels m, a et b :

1) $\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$

Exercice 9 (**) (Polygone)
$A_1, A_2, \cdots A_n$ désignent des points du plan complexes d'affixes $a_1, a_2, \cdots, a_n$.
On cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un polygone de sommets $M_1, M_2, \cdots, M_n$ dont les milieux sont les points A_i :
On note z_i l'affixe de M_i.
On pose A_i milieu de $[M_i, M_{i+1}]$ avec la convention $M_{n+1} = M_1$.

1) Écrire la condition d'existence sous la forme d'un système à coefficients entiers.
2) Montrer que si n impair, alors il existe une unique solution.
3) Montrer que si n est pair, il y a soit une infinité, soit 0 solutions.
(***) Donner la condition d'existence.
4) *Géométrie* : placer 3 points A_1, A_2 et A_3 quelconques dans le plan puis construire le polygone M_1, M_2, M_3.

Applications linéaires

Exercice 10 (**)
Pour chaque application, étudier si elle est injective/surjective/bijective ?
En cas de bijectivité, donner son application réciproque.

1) $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (2x, 3x-y) \end{cases}$

2) $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x+y, x-y, 2x+y) \end{cases}$

3) $f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y+z, x+y, x-z) \end{cases}$

4) $f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y+z, -y+3z) \end{cases}$

Exercice 11 (**)
Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, on définit

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (\lambda x + y, x + 2\lambda y) \end{cases}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit bijective.

II Matrices

Produit matriciel

Exercice 1 (*)
Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer (s'ils ont un sens) les produits

$$AB, BA, AC, CA, BC, CB, B^2.$$

Exercice 2 (*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Trouver toutes les matrices colonne u telles que

$$Au = 3u.$$

Exercice 3 (*)
Montrer que si la matrice A possède une ligne nulle, alors AB possède une ligne nulle.

Trace

Exercice 4 (**)
Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$ tel que $AB - BA = A$. Calculer $\operatorname{tr}\left(A^{2020}\right)$.

Exercice 5 (**)
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que

$$(\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}), \operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)) \Rightarrow A = B.$$

Matrices qui commutent

Exercice 6 (**)
Pour A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on note

$$\operatorname{Com}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}),\ MA = AM\}.$$

Com(A) est le *commutant de A*.

1) Montrer que $\operatorname{Com}(A) \neq \emptyset$.

2) Montrer que si $M, N \in \operatorname{Com}(A)$, alors $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \quad \lambda M + \mu N \in \operatorname{Com}(A)$.

3) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, déterminer $\operatorname{Com}(A)$.

Exercice 7 (*)
Soit $(a, b) \in (\mathbf{R}^*)^2$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
Trouver toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 8 (**) (méthode)
Résoudre l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.
Indication[1]

Exercice 9 (**)
Résoudre l'équation

$$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

Exercice 10 (***)
Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Même question avec les matrices triangulaires supérieures ; même question avec les matrices diagonales.

Exercice 11 (***)
Trouver toutes les matrices A qui commutent avec les matrices symétriques.

[1] On pourra remarquer que A et X commutent.

Puissances

Exercice 12 (**)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 13 (**)
Calculer A^k pour $k \in \mathbf{N}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 (**)
Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier.
On pose $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a \neq b$ et $a \neq (1-n)b$.
On définit la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ par

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & b & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}.$$

1) Pour $p \in \mathbf{N}$, calculer A^p.
2) (a) Calculer
$$A^2 - \big(2a + (n-2)b\big)A + (a-b)\big(a + (n-1)b\big)I_n.$$
   (b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 15 (***)
Soit A une matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $A^n = 0$.

Matrices inversibles

Exercice 16 (*)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3.
2) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 17 (*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Exprimer $A^3 - A$.
2) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 18 (*)
Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$.

1) Trouver une relation linéaire entre A^2, A et I_2.
2) En déduire une condition suffisante pour que A soit inversible ; donner alors l'expression de A^{-1}.

Exercice 19 (**)
Soit $n \geqslant 2$, montrer que la matrice de taille n

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

Pivot de Gauss

Exercice 20 (*)
Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ comme produit de matrices de transvections, dilatations, permutations.

Exercice 21 (*)
À l'aide d'opérations sur les lignes, donner la forme échelonnée réduite des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22 (*)
Calculer l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 23 (**)
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ quatre nombres complexes. On considère le système linéaire

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 3y & + & 4z & + & 7t & = \lambda_1 \\ x & + & y & + & z & + & t & = \lambda_2 \\ x & + & 3y & + & 3z & + & 2t & = \lambda_3 \\ x & + & 3y & + & 4z & + & 5t & = \lambda_4 \end{array} \right. .$$

Résoudre le système et en déduire l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24 (**)
Justifier que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (-1) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$

est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 25 (***)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, montrer que

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \iff (\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}),\ AB = 0 \Rightarrow B = 0).$$

Synthèse

Exercice 26 (*)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3.

2) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

3) (**méthode**)
Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe $(\alpha_p, \beta_p) \in \mathbf{R}^2$ tel que $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_3$.
Déterminer une relation de récurrence qui lie les suites $(\alpha_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et $(\beta_p)_{p\in\mathbf{N}}$ ainsi obtenues.

4) Déterminer α_p et β_p en fonction de $p \in \mathbf{N}$.
En déduire l'expression de A^p.

On pourra faire de même pour trouver A^p pour $p \leqslant -1$.

Exercice 27 (méthode)**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

2) Calculer $D = P^{-1}AP$ et vérifier que la matrice est diagonale.

3) Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1},
En déduire A^n en fonction de P, P^{-1} et des puissances de D.

4) En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 28 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 et A^3.

2) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

3) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 29 (**)

Soient A, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices symétriques.

1) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que le produit AB soit encore symétrique.

2) Les puissances successives de A sont-elles symétriques ?

3) Si A est inversible, A^{-1} est-elle symétrique ?

Exercice 30 (***)

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ que l'on suppose nilpotente.
Montrer que $(I_n - A)$ est inversible et exprimer son inverse en fonction des puissances de A.

Exercice 31 (**)

Idem à l'exercice 30 mais vu autrement.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

1) Montrer que s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^p = 0$, alors A n'est pas inversible.

2) Montrer que s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $(A + I)^p = 0$, alors A est inversible et calculer son inverse.

III Espaces vectoriels

Caractérisation des espaces vectoriels

Exercice 1 (*)
Dire à chaque fois s'il s'agit d'un espace vectoriel, puis le démontrer.

1) $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}_+^2,\ \text{tel que } x=y\right\}$.
2) $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ \text{tel que } 2x-5y-1=0\right\}$.
3) $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ \text{tel que } 2xy=0, x+y=0\right\}$.
4) $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ \text{tel que } (x-1)y=0\right\}$.
5) $\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ \text{tel que } x+y+z=0, x-y+z=0\right\}$.
6) $\{(x,2x,3x)\}_{x\in\mathbf{K}}$.
7) $\{(x,y,z),\ \text{tel que } \exists m\in\mathbf{R}, x=m(y+z)\}$.
8) Le disque unité de $\mathbf{R}^2$.
9) L'axe des abscisses de $\mathbf{R}^2$.
10) Les deux axes (abscisses et ordonnées) de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 2 (*)
Dire à chaque fois s'il s'agit d'un espace vectoriel, puis le démontrer.

1) Pour $P\in\mathbf{R}[X]$ fixé, les racines réelles de P.
2) $\{P\in\mathbf{K}[X],\ \text{tel que } P(0)=0\}$.
3) $\{P\in\mathbf{K}_n[X],\ \text{tel que } P(0)=1\}$.
4) $\{P\in\mathbf{K}_n[X],\ \text{tel que } P(0)=0 \text{ ou } P(1)=0\}$.
5) $\{P\in\mathbf{K}_n[X],\ \text{tel que } P(0)=0 \text{ et } P(1)=0\}$.
6) $\{P\in\mathbf{K}_n[X],\ \text{tel que } P(0)=1 \text{ et } P(1)=0\}$.
7) $\{P\in\mathbf{K}_n[X],\ \text{tel que } P \text{ est scindé}\}$.
8) $\{P\in\mathbf{K}[X],\ \text{tel que } \deg P\geqslant 3\}$.

Exercice 3 (*)
Dire à chaque fois s'il s'agit d'un espace vectoriel, puis le démontrer.

1) Pour $n\geqslant 1$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures réelles d'ordre n.
2) Pour $n\geqslant 1$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures réelles d'ordre n à coefficients strictement positifs.
3) L'ensemble des suites qui convergent.
4) L'ensemble des suites qui divergent.
5) Pour $T>0$ fixé, l'ensemble des fonctions T-périodiques.
6) Pour I un intervalle donné et $k\in\mathbf{N}$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Exercice 4 (**)
Soient $E=\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$,
F l'ensemble des applications croissantes sur $\mathbf{R}$,
et G l'ensemble des applications décroissantes sur $\mathbf{R}$.

1) F et G sont-ils tous deux des sous-espaces vectoriels de E ?
2) L'ensemble des applications qui sont sommes d'une application croissante et d'une application décroissante est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 5 (**)
L'ensemble

$$\left\{(u_n)\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ \left(u_n^2\right) \text{ converge}\right\}$$

est-il un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$?

Familles libres

Familles finies

Exercice 6 (*)
Soient dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (1,1,0), \quad v_2 = (4,1,4) \quad \text{et} \quad v_3 = (2,-1,4).$$

1) Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.
Faire de même avec v_1 et v_3, puis avec v_2 et v_3.

2) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 7 (*)
La famille $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \ln x$ est-elle libre dans l'espace vectoriel des applications de $]0;+\infty[$ dans $\mathbf{R}$?

Exercice 8 (*)
Soit $a \in \mathbf{R}$. $u = (a,1,1)$, $v = (1,a,1)$ et $w = (1,1,a)$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que (u,v,w) soit libre dans $\mathbf{K}^3$.

Exercice 9 (**)
On considère une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants (e_1, e_2, e_3, e_4).
Les familles suivantes sont-elles libres :

1) $(e_1, 2e_2, e_3)$.

2) (e_1, e_3).

3) $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$.

4) $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$.

5) $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$.

6) $(e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3, e_1 + 2e_2 - e_4, 3e_1 - e_2 + e_3)$.

Familles infinies

Exercice 10 (**) (méthode)
Montrer que $\left\{t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}, \lambda \in \mathbf{R}\right\}$ est une famille libre de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Exercice 11 (**) (méthode)
Montrer la liberté de $(x \mapsto \sin^n(x))_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercices théoriques

Exercice 12 (**)
Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre de E.
Montrer que

$$a \notin \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p) \Rightarrow (e_1 + a, ..., e_p + a) \text{ est libre.}$$

Exercice 13 (**) (Lemme d'échange)
Soient $(e_1, ..., e_n)$ et $(e'_1, ..., e'_n)$ deux bases d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.
Montrer qu'il existe $j \in \{1, ..., n\}$ tel que la famille $(e_1, ..., e_{n-1}, e'_j)$ soit encore une base de E.

Pour s'entraîner

Exercice 14
Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ?

1) $(1,1,0),\ (1,0,-1),\ (1,2,1)$ dans $\mathbf{R}^3$.

2) $(1,1,0,0),\ (1,0,-1,1),\ (1,2,1,0)$ dans $\mathbf{R}^4$.

3) $x \mapsto x^2,\ x \mapsto x^3,\ x \mapsto x^4$ dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Exercice 15 (*)
Les familles suivantes sont-elles libres ?

1) $(1,1,1), (2,2,2)$ dans $\mathbf{K}^3$.

2) $(1,0,1), (2,2,2)$ dans $\mathbf{K}^3$.

3) $(1,0,1), (0,2,2), (3,3,0)$ dans $\mathbf{K}^3$.

4) $(1,2,5), (-1,2,-2), (-1,6,1)$ dans $\mathbf{K}^3$.

Exercice 16 (**)
Montrer que les suites réelles $(1)_{n \in \mathbf{N}}$, $(n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(\mathrm{e}^n)_{n \in \mathbf{N}}$ forment une famille libre de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Familles génératrices et bases

Pour commencer

Exercice 17

1) Donner un exemple d'une famille qui est libre lorsque l'espace est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel mais liée lorsque c'est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

2) On pose $e_1 = (-1, 1, 1)$, $e_2 = (1, -1, 1)$ et $e_3 = (1, 1, -1)$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et donner les coordonnées de $(8, 4, 2)$ dans cette base.

3) (a, b) liée $\Rightarrow b \in \mathrm{Vect}\,(a)$?

4) Soient a, b, c trois vecteurs non nuls.
(a, b, c) liée $\Rightarrow c \in \mathrm{Vect}\,(a, b)$?

Exercice 18 (*)
Soit $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$.
À quelles conditions sur $(x, y) \in \mathbf{K}^2$, le vecteur $u = (-2, x, y, 3)$ appartient-il à $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$?

Exercice 19 (**)

1) $(4, 5, 1)$ est-il une combinaison linéaire de $(2, 3, 0)$ et $(1, 1, 0)$?

2) Décrire le $\mathbf{R}-$espace vectoriel engendré par $(0, 1, 1)$ et $(0, 1, 0)$.

Exercice 20 (*)
Montrer que $\left(X^2, (X+1)^2, (X-1)^2\right)$ est une base de $\mathbf{K}_2[X]$ et donner les coordonnées de $(X+2)^2$ dans cette base.

Pour s'entraîner

Exercice 21 (*)
Parmi les familles suivantes, lesquelles sont génératrices de $\mathbf{R}^3$?

1) $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2))$.

2) $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$.

3) $((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$.

4) $((1, 0, 3), (0, 2, 1), (3, 1, 1), (2, 1, -1))$.

Exercice 22 (*)
Montrer que la famille $(2, 1, 1)$, $(1, 4, 3)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ forme une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$.
Trouver une base extraite de cette famille.

Espace $\mathbf{K}^n$

Égalité d'espaces

Exercice 23 (*)
Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ suivants :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\right\}$$
$$G = \mathrm{Vect}\left((1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1), (5, -3, -2, 5)\right).$$

1) Calculer la dimension de F.

2) Montrer que $G \subset F$.

3) Montrer que $G = F$.

Exercice 24 (**)
Montrer que dans $\mathbf{R}^3$,

$$\mathrm{Vect}\,((2, 3, -1), (1, -1, -2)) = \mathrm{Vect}\,((3, 7, 0), (5, 0, -7)).$$

Exercice 25 (**)
Dans $\mathbf{R}^3$, les deux espaces $F_1 = \mathrm{Vect}\,((1, 2, 3), (3, 2, 1))$, et $F_2 = \mathrm{Vect}\,((1, 0, -1), (2, 4, 6))$ sont-ils égaux ?

Familles de $\mathbf{K}^n$

Exercice 26 (*)
Soient $v_1 = (2, -1, -1)$, $v_2 = (-1, 2, 3)$, $v_3 = (1, 4, 7)$ et $v_4 = (1, 1, 2)$.
On pose $F = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

1) Montrer sans calcul que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est liée.

2) Quelle est la dimension de F.

3) Extraire de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) une sous famille libre de cardinal maximal.

4) Compléter cette base en une base de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 27 (*)

1) Donner le rang de la famille :

$$S = \left\{u_1 = (1, 2, 1, 0), u_2 = (-1, 1, 1, 1), u_3 = (2, -1, 0, 1), u_4 = (2, 2, 2, 2)\right\}.$$

2) À partir d'une famille libre extraite de S, la compléter pour obtenir une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 28 (**)
Dans $\mathbf{K}^4$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1,1,1,1) \qquad v_2 = (1,2,3,4) \qquad v_3 = (3,1,4,2)$$
$$v_4 = (10,4,13,7) \qquad v_5 = (1,7,8,14)$$

1) La famille de ces cinq vecteurs est-elle libre ?
2) Quel est son rang ?
3) Extraire de cette famille une base $\mathscr{E}$ de $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.
4) À quelle condition le vecteur (x_1, x_2, x_3, x_4) appartient-il à F ?
5) Compléter la famille $\mathscr{E}$ en une base de $\mathbf{K}^4$.

Exercice 29 (**)
Soit $E = \left\{(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbf{R}^n,\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$.

1) Montrer que c'est un espace vectoriel.
2) Donner une base de E.

Espaces de polynômes

Exercice 30 (**) (à savoir refaire)
Soit $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ une famille de $\mathbf{R}_n[X]$ telle que $\forall i \in [\![0,n]\!],\ \deg P_i = i$.
Montrer que cette famille est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 31 (**) (cas général)

1) Soit $I \subset \mathbf{N}$, on considère une famille de polynômes $(P_i)_{i\in I} \in (\mathbf{K}[X])^I$ tous non nuls, telle que $\forall (i,\, j) \in I^2, \deg(P_i) = \deg(P_j) \Rightarrow i = j$.
Montrer que $(P_i)_{i\in I}$ est une famille libre.
2) On considère une famille de polynômes $(P_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que $\forall i \in \mathbf{N}, \deg(P_i) = i$.
Montrer que $(P_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$.

Exercice 32 (*)
Donner une famille génératrice de $\{P \in \mathbf{K}_3[X] \text{ tel que } P(0) = P'(0) = 0\}$.

Exercice 33 (*)
Pour $(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1}$ deux à deux distincts, montrer que les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à cette famille forment une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Exercice 34 (**) (base)
Soit F défini par : $F = \left\{P \in \mathbf{R}_3[X],\ \int_0^1 P = 0\right\}$.

1) Montrer que F est un espace vectoriel.
2) Donner une base de F.

Exercice 35 (**)
Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on définit $P_i = \sum_{k=0}^{i} X^k$.

1) Montrer que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ forme une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
2) Exprimer la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$ dans la base $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$.

Autres espaces

Exercice 36 (**)

1) Donner une base et la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ (matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$).
2) Faire de même avec $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ (matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$).
3) Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.

Exercice 37 (*)

Dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, on considère les trois vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

1) Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.
2) Donner les coordonnées de $\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 38 (**) (À savoir refaire)
Soient $p \in \mathbf{N}^*$ et E l'ensemble des suites réelles de période p.
Montrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
Donner la dimension de E et une base.

Exercice 39 (***)
Soit $E = \{x \mapsto A\sin(x+\varphi),\ (A,\, \varphi) \in \mathbf{R}^2\}$.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel des fonctions continues $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
2) Donner une base de E.

Somme d'espaces

Exercice 40 (*)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^5$ de dimension 3. Montrer que F et G ne peuvent pas être en somme directe dans $\mathbf{R}^5$.

Exercice 41 (*)

1) Montrer que $\mathbf{C}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et donner sa dimension.
2) Déterminer un supplémentaire de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ vu comme $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
3) Montrer a contrario, que $\mathbf{C} = \operatorname{Vect}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ sur le corps $\mathbf{C}$.

Exercice 42 (*)
Soit F un plan de $\mathbf{R}^3$ et G une droite de $\mathbf{R}^3$.
Montrer que $G \not\subset F \iff F \oplus G = \mathbf{R}^3$.
Le résultat est-il encore vrai pour deux plans dans $\mathbf{R}^4$?

Exercice 43 (*)
Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$. On note F l'ensemble des applications paires et G l'ensemble des applications impaires.

1) Montrer que F et G sont deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels
2) Montrer que $E = F \oplus G$
3) Donner la décomposition de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ comme somme directe d'un élément de F et d'un élément de G.

Exercice 44 (**)
On pose $F = \left\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}},\ f(1) = 0\right\}$ et $G = \left\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}},\ \exists a \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = ax\right\}$.

Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Exercice 45 (**)
Dans $\mathbf{R}^3$, on considère

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x - y - 2z = 0\right\},$$
$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x = 2y = x + z\right\}.$$

1) Donner la dimension de F, puis celle de G.
2) Montrer que $F \oplus G = \mathbf{R}^3$.

Exercice 46 (**)
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, et H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Montrer que $F + G = F \oplus H$.

Exercice 47 (**)
Montrer que $F = \left\{f \in \mathbf{C}^0([0,1], \mathbf{R}),\ \text{tel que } \int_0^1 f = 0\right\}$ est un espace vectoriel.
Trouver *tous* les supplémentaires de F dans $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$.

Entraînement

Exercice 48 (**)
Soit $n \geqslant 1$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, on considère $E = \mathbf{R}_n[X]$.
On définit l'ensemble $F = \{P \in E,\ P(\alpha) = 0\}$, et les deux familles

$$\mathscr{C} = \left\{(X - \alpha)^k, k \in [\![1, n]\!]\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{B} = \left\{(X - \alpha)X^k, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

1) Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de F.
2) Quelle est la dimension de F ?
3) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F.
4) Donner les coordonnées de $(X - \alpha)^n$ dans la base $\mathscr{B}$.
5) Trouver un espace vectoriel G, tel que $F \oplus G = E$.

Exercice 49 (**)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $P \in \mathbf{R}_n[X]$ de degré exactement égal à n.
Montrer que $(P, P', P'', P^{(3)}, \ldots, P^{(n)})$ forme une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 50 (**)
Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$ qui sont affines sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$.
Démontrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 51 (**)
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère

$$F = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4,\ b - 2c + d = 0\right\}$$
$$G = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4,\ a = d \text{ et } b = 2c\right\}$$

1) Donner une base de F, une base de G.
2) Donner une base de $F \cap G$.
3) Montrer que $F + G = \mathbf{R}^4$.

Exercice 52 (*)
Soient deux droites affines de $\mathbf{R}^n$, $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \emptyset$. Les droites sont-elles nécessairement parallèles (même direction) ? Discuter en fonction de n.

Exercice 53 (*)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^5$ de dimension 3.
Montrer que F et G ne peuvent pas être en somme directe dans $\mathbf{R}^5$.

Exercice 54 (**)
Soit E le sous-ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ défini par

$$E = \left\{ M(a,b,c)) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, \quad (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$$

1) Montrer que E est un espace vectoriel (pour la somme et le produit externe usuels).

2) Montrer que E est stable par produit matriciel.

3) Donner la dimension de E.

4) Soient $e_1 = M(1,0,0)$, $e_2 = M(0,1,0)$ et $e_3 = M(0,0,1)$.
On note $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$, montrer que c'est une base de E (si ça n'a pas déjà été fait).

5) Soit $u = M(1,1,1)$, $v = M(2,1,2)$, et $w = M(0,2,0)$.
Montrer que $\mathscr{B} = (u,v,w)$ est une base de E. et exprimer la famille $\mathscr{C}$ dans cette base.

Exercice 55 (*)
On considère l'ensemble E des vecteurs $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$ vérifiant $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un espace vectoriel ?
Si oui, en donner une base.

Exercice 56 (*)
Parmi les familles suivantes, lesquelles sont génératrices de $\mathbf{R}^3$?

1) $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,2))$

2) $((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$

3) $((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$

4) $((1,0,3),(0,2,1),(3,1,1),(2,1,-1))$

Perfectionnement

Exercice 57 (**)
Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E (de dimension finie).
Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Exercice 58 (***)
E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel

1) Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E.
Montrer que $F \cup G$, est un espace vectoriel si, et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

2) Soient $F_1, F_2, \cdots F_n$ des sous espaces vectoriels de E.
Montrer que $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ est un espace vectoriel si, et seulement si l'un des F_i est égal à l'union.
Indication : Une droite affine qui coupe un espace vectoriel en au moins deux points est incluse dans cet espace.

Exercice 59 (***)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose

$$P_k = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

1) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$. est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

2) Montrer que $\forall x \in \mathbf{Z}, \forall k \in \mathbf{N}$, $P_k(x) \in \mathbf{Z}$.

3) Trouver tous les polynômes P tels que $\forall x \in \mathbf{Z},\ P(x) \in \mathbf{Z}$.

Exercice 60 (***)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.
On pose $F = \bigcap_{i \in I} F_i$, montrer qu'il existe une partie finie $J \subset I$ telle que

$$F = \bigcap_{j \in J} F_j.$$

IV Applications linéaires

Pour commencer

Exercice 1 (Vrai-Faux)
Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (5x+2y, x-y) \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, y) \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+1, y, x+y) \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, z) \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,x,x,x) \end{array}\right.$

6) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) & \to & \mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \\ f & \mapsto & f'+5f \end{array}\right.$

Exercice 2 (*)
Cette application est-elle $\mathbf{R}$-linéaire ?

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{C} \\ x & \mapsto & ix. \end{array}\right.$$

Exercice 3 (*)
Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x+y, x-y)$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbf{R}^2$ et donner sa réciproque.

Exercice 4 (*)
Donner l'image et le noyau de

1) $(x,y) \mapsto (x+3y, x-3y)$

2) $(x,y) \mapsto (x,y,x+y)$

3) $(x,y,z) \mapsto (x+y+2z, 2x-3y+z)$

4) $(x,y,z) \mapsto (x-y+z, x+5y-z, 2x+2y+3z)$

5) $(x,y,z,t) \mapsto (x-y-z+t, x+2y+z-t, 3x-z+t, 2x-y+t)$

Exercice 5
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1) Montrer que la donnée $\begin{cases} \varphi(e_1) & = e_1+e_2 \\ \varphi(e_2) & = e_1-e_2 \\ \varphi(e_3) & = e_1+\lambda e_3 \end{cases}$ définit un unique endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$.

2) Soit $x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. Calculer $\varphi(x)$.

3) Quelle valeur donner à λ pour que φ soit injective ? soit surjective ?

Exercice 6
Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{R}^4$
Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbf{R}^4$ tel que

- $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$
- $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$
- $\ker f = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4,\ \text{tels que}\ \ x+2y+z=0 \text{ et } x+3y-t=0\}$.

Indication : on pourra chercher une base de $\ker f$

Images et noyaux

Exercice 7 (*)
Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes.

1) $\begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & y \end{cases}$

2) $\begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x+y \end{cases}$

3) $\begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y,z) \end{cases}$

4) $\begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y,z) \end{cases}$

5) $\begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y-z,x+y+z) \end{cases}$

Exercice 8
Donner une famille génératrice du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par

$$\left\{(5x+3y-2z, x+y, z, x-y+2z) \mid (x,y,z) \in \mathbf{R}^3\right\}$$

Interpréter cet espace comme le noyau d'une application linéaire.

Exercice 9 (*)
Écrire les espaces suivants comme des images d'applications linéaires.

1) $E = \mathrm{Vect}\,(1,1),(1,2)$
2) $E = \mathrm{Vect}\,(1,2,1)$
3) $E = \mathrm{Vect}\,(1,2,1),(5,1,2)$

Exercice 10 (*)

$$f : (x,y,z) \mapsto (ax+y+z, ax+ay+z, x+ay+az).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, pour que l'application soit injective/surjective/bijective.

Exercice 11 (**)
Soient $(f,g) \in (\mathscr{L}(E))^2$. Montrer que si f et g commutent, alors $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}\,(g)$ sont stables par f.

Exercice 12 (**)
Soient E,F,G trois espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Les deux questions sont indépendantes.

1) Interpréter la proposition "$g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$" avec $\mathrm{Im}\, f$ et $\ker g$.
2) Montrer que $f\left(\ker(g \circ f)\right) = \ker g \cap \mathrm{Im}\, f$.

Rang

Exercice 13 (*)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, V un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer que $V \subset f(V) \Rightarrow f(V) = V$

Exercice 14 (**)
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E un espace de dimension $n \geqslant 1$.
On définit pour tout $k \in \mathbf{N}$, $d_k = \dim\left(\ker f^{k+1}\right) - \dim\left(\ker(f^k)\right)$.

1) Montrer que

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \mathrm{rg}\, f^{k+1} = \mathrm{rg}\, f^k - \dim\left(\mathrm{Im}\, f^k \cap \ker f\right).$$

2) En déduire que la suite (d_k) est décroissante.

Exercice 15 (**)
Soit E de dimension finie n, et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\left(\ker f = \mathrm{Im}\, f\right) \iff \left(f^2 = 0 \text{ et } n = 2\mathrm{rg}\, f\right).$$

Exercice 16 (**)
Soit E de dimension finie, et $f,g \in \mathscr{L}(E)$, montrer que

$$\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) - n \leqslant \mathrm{rg}\,(fg) \leqslant \min\left\{\mathrm{rg}\,(f), \mathrm{rg}\,(g)\right\}.$$

Exercice 17 (**)
Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}\, f = 1$.
Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

Endomophismes particuliers

Exercice 18
Soit $F = \left\{(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbf{K}^4,\; x+y-z+t = y+t = 0\right\}.$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^4$, l'ecrire comme intersection de noyaux de formes linéaires.
Soit $G = \mathrm{Vect}\left((1,\, 1,\, 1,\, 1),\, (1,\, 1,\, -1,\, 1)\right).$
Montrer que $F \oplus G = \mathbf{K}^4$.
Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.

Exercice 19
Déterminer l'expression de la projection sur $F = \mathrm{Vect}\left((0,\, 1,\, -1)\right)$ parallèlement au plan $G = \mathrm{Vect}\left((1,\, 0,\, 0),\, (1,\, 1,\, 1)\right).$

Exercice 20 (**)
On pose $E = \mathbf{R}^3$ et on définit

$$F = \{(x, y, z) \in E \text{ tel que } x + z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in E \text{ tel que } x = 2y = z\}.$$

1) Montrer que F et G sont deux espaces supplémentaires dans E.
2) Calculer la projection du vecteur (x, y, z) sur F parallèlement à G
3) Calculer la symétrie du vecteur (x, y, z) par rapport à F parallèlement à G

Exercice 21 (***)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, f, g deux endomorphismes de E vérifiant $f \circ g = 0$ et $f + g$ inversible.
Montrer que $\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) = n$.

Exercice 22 (**)
Soit $E = \mathbf{K}[X]$. On pose $Q = (X-1)(X+2)$. Pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$, on note $u(P)$ le reste de la division euclidienne de P par Q.
Montrer que u est un projecteur dont on déterminera le noyau et l'image.

Exercice 23 (***)
Soit E un espace de dimension finie.
Montrer que les homothéties sont les seuls endomorphismes qui commutent avec tous les autres (pour la loi $\circ$).

Exercice 24 (***)
Soit E de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{GL}(E)$ et p un projecteur de E tel que $f = g \circ p$.

Formes linéaires

Exercice 25 (*)
Soit E un espace vectoriel et $f \in E^*$.
Montrer que si $f \neq 0$, alors f est surjective.

Exercice 26 (**)
Soit E un espace vectoriel et $f,\, g$, deux formes linéaires sur E.
Montrer que si, $\forall x \in E,\; f(x)g(x) = 0$,
alors $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 27 (**)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.
On note $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ une base de E^* l'ensemble des formes linéaires sur E.

1) Montrer que $\bigcap_{i=1}^n \ker \varphi_i = \{0\}.$
2) Montrer il existe une unique famille de vecteurs $(f_i)_{i \in [\![1,\, n]\!]} \in E^n$ dont la famille $(\varphi_i)_{i \in [\![1,\, n]\!]}$ est la base duale.
   On l'appelle la base anté-duale de (φ_i).
3) Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
   On note $(e_i^*)_{i \in [\![1,\, n]\!]}$ sa base duale.
   Montrer que la base anté-duale de $(e_i^*)_{i \in [\![1,\, n]\!]}$ est exactement la base $(e_i)_{i \in [\![1,\, n]\!]}$.
4) Si $E = \mathbf{K}_n[X]$, $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ deux à deux distincts.
   Pour tout $i \in [\![0,\, n]\!]$ on note $\varphi_i \;: P \mapsto P(a_i)$.
   Montrer que $(\varphi_i)_{i \in [\![0,\, n]\!]}$ est une base de $(\mathbf{K}_n[X])^*$ et donner sa base anté-duale.

Entraînement

Exercice 28 (*)
Pour $n \in \mathbf{N}*$, on définit l'application

$$u : \begin{cases} \mathbf{R}_n[X] & \to \mathbf{R}_n[X] \\ P & \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

1) Justifier que $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}_n[X])$
2) Déterminer le noyau de u.
3) Montrer que $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathbf{R}_{n-1}[X]$.
4) Déterminer $\mathrm{Im}\,(u)$.

Exercice 29 (**)
Soit ψ, l'application de $E = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), f(0) = 0\}$, dans lui-même définie par

$$\forall f \in E, \quad \psi(f) : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que E est un espace vectoriel.
2) Montrer que ψ est un endomorphisme de E.
3) Montrer que ψ n'est pas un automorphisme de E.

Exercice 30 (**)
Soient f et g deux endomorphismes de E.
Montrer que f et g sont inversibles si et seulement si $f \circ g$ et $g \circ f$ le sont.

Exercice 31 (**)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$.
Montrer que $\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(f^2) \leqslant \dim E$.

Exercice 32 (***)
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose que

$$\forall x \in E,\ \exists \lambda \in \mathbf{K},\ f(x) = \lambda x.$$

Montrer que $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ \forall x \in E,\ f(x) = \lambda x$.

Exercice 33 (***)
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ injective.
Montrer que pour tout famille $(x_1, ..., x_p)$ de vecteurs de E, on a

$$\mathrm{rg}\,(f(x_1), ..., f(x_p)) = \mathrm{rg}\,(x_1, ..., x_p).$$

Exercices CCINP

Exercice 34 (CCINP 55)
Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbf{C}^2$.

1) (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2) Dans cette question, on considère la suite de E définie par: $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication: discuter suivant les valeurs de a.

Exercice 35 (CCINP 60)
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2\,(\mathbf{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1) Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2) f est-il surjectif ?
3) Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4) A-t-on $\mathscr{M}_2\,(\mathbf{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

Exercice 36 (CCINP Exercice 62 - extrait)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1) Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2) Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
3) Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

Exercice 37 (CCINP 64)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1) Démontrer que: $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2) (a) Démontrer que: $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que: $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Exercice 38 (CCINP 71)
Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

1) Vérifier que $\mathbf{R}^3 = P \oplus D$.

2) Soit p la projection vectorielle de $\mathbf{R}^3$ sur P parallèlement à D.
Soit $u=(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

3) Déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 39 (CCINP 87)
Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1) Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$

2) Soit $k \in [\![0,n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3) Prouver que $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Exercice 40 (CCINP 90)
$\mathbf{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbf{K}$.

1) Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{K}^3$
et on pose $\forall k \in \{1,2,3\},\ L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbf{K}_2[X]$.

   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3) Soit $P \in \mathbf{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

4) **Application** : on se place dans $\mathbf{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.

   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

V Applications linéaires et représentation matricielle

Écriture matricielle

Exercice 1 (*)
Soit $M = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.
On note u_M l'application linéaire canoniquement associée à M *(dans les bases canoniques de $\mathbf{K}^4$ et $\mathbf{K}^3$).*
Déterminer des bases de $\ker u_M$ et $\operatorname{Im} u_M$.

Exercice 2 (*)
Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit l'application

$$u : \begin{cases} \mathbf{K}_n[X] & \to \mathbf{K}_{n+1}[X] \\ P & \mapsto XP(X) \end{cases}$$

1) Justifier que $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_n[X], \mathbf{K}_{n+1}[X])$
2) Déterminer, avec le minimum de calculs, le noyau et l'image de u.
3) Déterminer la matrice de u entre les bases canoniques de $\mathbf{K}_n[X]$ et $\mathbf{K}_{n+1}[X]$.

Exercice 3 (*)
Pour $n \in \mathbf{N}*$, on définit l'application

$$u : \begin{cases} \mathbf{K}_n[X] & \to \mathbf{K}_n[X] \\ P & \mapsto P(X) - XP'(X) \end{cases}$$

1) Justifier que $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_n[X])$
2) Déterminer le noyau et l'image de u.
3) Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.

Exercice 4 (**)
Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{K}^4$.
Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbf{K}^4$ tel que

- $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$,
- $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$,
- $\ker f = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{K}^4,$ tel que
  $x + 2y + z = 0$ et $x + 3y - t = 0\}$.

Exercice 5 (*)
Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathrm{GL}(E)$.
Montrer qu'il existe deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ telles que la matrice de f entre les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ soit la matrice identité de taille n.

Exercice 6 (**)
On note $\mathscr{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\phi : \begin{pmatrix} \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{pmatrix}$.
Montrer que ϕ est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique.
Préciser $\ker \phi$ et $\operatorname{Im} \phi$.

Exercice 7 (**)
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base $\mathscr{E}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
2) De même avec f^2.
3) Vérifier que $E = \operatorname{Im} f^2 \oplus \ker f^2$.

Endomorphismes particuliers

Exercice 8
Soit $f\ :\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ définie par $\forall(x,\,y,\,z)\in\mathbf{R}^3$,

$$f\,(x,\,y,\,z)=(x,\,-x+y-z,\,-x).$$

1) Montrer que $f\in\mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$.
2) Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
3) Calculer M^2.
4) Montrer que M peut s'écrire de façon diagonale dans une certaine base. Déterminer une telle base et donner la matrice de passage.

Exercice 9 (**)
Soit $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.
Montrer que A est la matrice d'un projecteur dont on déterminera la base et la direction.

Exercice 10 (**)
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

1) Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ?
2) Montrer que l'on peut construire une base $\mathscr{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ de E telle que la matrice de A dans $\mathscr{B}'$ soit
$$A'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$
Donner la matrice de passage.

Exercice 11 (***)
Soient $(A,\,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}))$ et $f\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbf{R})&\to&\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\\X&\mapsto&X+\mathrm{tr}(AX)B.\end{array}\right.$

1) Montrer que $f\in\mathscr{L}\left(\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\right)$.
2) Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur A et B pour que f soit une symétrie.
3) Dans ce cas, donner la base et la direction de f.

Changement de base

Exercice 12 (*)
On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
Soit $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^2&\to&\mathbf{R}^2\\(x,y)&\mapsto&(2y,x).\end{array}\right.$

1) Déterminer la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)=\mathrm{mat}(f,\mathscr{C},\mathscr{C})$ de f dans la base $\mathscr{C}$.
2) Montrer que les vecteurs $b_1=(1,1)$ et $b_2=(-1,1)$ forment une base de $\mathbf{R}^2$ que l'on notera $\mathscr{B}$.
3) Déterminer les matrices $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Exercice 13 (*)
Soient $\mathscr{B}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ une base de E et $\mathscr{B}'=(e_n,e_{n-1},\cdots,e_1)$ la base lue en sens inverse.
Exprimer les matrices de passage : $\mathrm{Pa}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $\mathrm{Pa}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Exercice 14 (*)
Soit (e_1,e_2,e_3) une base de $\mathbf{R}^3$.
Chercher les applications $f\in\mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ telles que la matrice de f dans (e_1,e_2,e_3) soit la même que dans (e_2,e_3,e_1).

Exercice 15 (*)
E est un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de E.
On pose $u=-e_1+e_2+e_3,\ v=e_1-e_2+e_3,\ w=e_1+e_2-e_3$.

1) Montrer que $\mathscr{B}'=(u,v,w)$ est une base de E et donner la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ et celle de $\mathscr{B}'$ vers $\mathscr{B}$.
2) Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&-1&-2\\1&-1&0\end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 16 (*)
Dans $E=\mathbf{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathscr{C}$, on définit les vecteurs

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\2\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0\\0\\3\\-1\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\text{ et }e_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

- Montrer que $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ est une base de E.
- Exprimer $\mathrm{Pa}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$.

Exercice 17 (**)
Soit E un espace vectoriel de dimsnion finie,
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$.
Déterminer une base de E où f est représentée par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0_{s,r} & 0_s \\ I_r & 0_{r,s} \end{pmatrix}.$$

Exercice 18 (**)
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A.

1) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathscr{C}$ soit D.
2) Déterminer la matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.
3) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4) En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} x_{n+1} & = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} & = x_n - z_n \\ z_{n+1} & = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Rang

Exercice 19 (**)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer que f est la somme de r endomorphismes de rang 1.

Exercice 20 (**)
Soit $\mathscr{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. f_A est l'endomorphisme défini par $f(X) = AX$.

1) Quelle est la matrice de f_A dans $\mathscr{B}$ (en fonction des coefficients de A) ?
2) Quel est le rang de f_A ?

Exercice 21 (**)
Soit $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ une matrice diagonale par blocs. Montrer que $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

Exercice 22 (***)
Soient $\alpha \in \mathbf{R}$ et $n \geqslant 2$.
On définit la matrice :

$$M_{\alpha,n} = (\cos((i+j)\alpha))_{(i,j)\in[\![0,n-1]\!]^2}.$$

Montrer que

1) $\operatorname{rg} M_{\alpha,n} = 2$ si $\alpha \notin \pi\mathbf{Z}$,
2) $\operatorname{rg} M_{\alpha,n} = 1$ si $\alpha \in \pi\mathbf{Z}$.

Entraînement

Exercice 23 (classique) (**)
Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent non nul de E. On note p son indice de nilpotence (le plus petit entier tel que $f^p = 0$).

1) Soit $x \notin \ker f^{p-1}$.
Montrer que $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ est libre.
2) En déduire que $f^n = 0$.
3) On suppose à présent que $n = p$.
Montrer que $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ est une base de E.
4) Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 24 (*)
On note $E = \mathbf{K}_2[X]$ de degré au plus 2.
φ est l'application de E dans $\mathbf{K}^3$ définie par $\varphi(P) = (P(0), P'(1), P''(2))$.

1) Démontrer que φ est un isomorphisme.
2) Donner la matrice A de φ dans les bases canoniques de E et de $\mathbf{K}^3$.
3) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose $H_i = \varphi^{-1}(e_i)$.
4) À l'aide de la matrice A^{-1}, exprimer H_1, H_2, H_3 en fonction de e_1, e_2, e_3.

Exercice 25 (*)
Soit E un espace de dimension finie muni d'une base $(e_i)_{i\in[\![1,\,n]\!]}$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
On note M, la matrice de u dans (e_i) et pour tout $i \in [\![1,\,n]\!]$, $E_i = \mathrm{Vect}\,(e_1, \cdots, e_i)$.
Montrer que M est triangulaire supérieure si, et seulement si $\forall i \in [\![1,\,n]\!]$, E_i est stable par u.

Exercice 26 (**)
Soient E un espace de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer qu'il existe un polynôme non nul qui annule f.
Indication : montrer que $\left(\text{Id}, f, f^2, ..., f^{n^2}\right)$ est liée.

2) Montrer que si f est inversible, alors f^{-1} est un polynôme en f.

3) Soit $P = QR \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme annulateur de f.
On suppose que $Q \wedge R = 1$.
Montrer que $E = \ker(Q(f)) \oplus \ker(R(f))$.

Exercice 27 (**)
Soit E un $\mathbf{R}$-ev de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ non nulle telle que $f^2 = 0$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 28 (**)
Soit E un espace de dimension fini et f un endomorphisme de E de rang 1.

1) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

2) Montrer que $\lambda = \text{tr}(f)$.

Exercice 29 (***)
Montrer que pour tout endomorphisme f, il existe un isomorphisme g tel que $f \circ g$ soit un projecteur.

Exercice 30 (***)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}| .$$

Montrer que $A \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$.
On pourra considérer l'équation $AX = 0$.

Exercice 31 (***)
Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbf{R})$ $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbf{R})$ telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $BA = I_2$.

Exercice 32 (***)
Trouver l'ensemble des matrices qui ne sont semblables qu'à elles-mêmes.

Exercice 33 (CCINP 59 - extrait)
Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1) Démontrer que f est bijectif de deux manières:

   (a) sans utiliser de matrice de f,

   (b) en utilisant une matrice de f.

2) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

VI Déterminants

Groupe symétrique

Exercice 1 (*)
Pour tout $\sigma \in S_n$, calculer
$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i).$$

Exercice 2 (**)
Montrer que pour toute permutation $\sigma \in S_n$,
$$\sigma^{n!} = \mathrm{Id}.$$

Exercice 3 (**)
Montrer que toute permutation $\sigma \in S_n$ peut s'écrire comme produit de transpositions de la forme $(1,\, i)$ avec $i \in [\![2,\, n]\!]$.

Exercice 4 (**)
On définit la fonction
$$f\ :\ \begin{cases} S_n & \to & \mathbf{N} \\ \sigma & \mapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} k\sigma(k). \end{cases}$$
Montrer que f admet un maximum et un minimum sur S_n et les déterminer.

Exercice 5 (***)
Montrer que la signature est l'unique morphisme non constant de $(S_n,\, \circ)$ dans $(\mathbf{C}^*,\, \times)$.

Révisions de calcul matriciel

Exercice 6 (*)
Soient $b_1 = (1,1,2)$, $b_2 = (-2,-1,3)$ et $b_3 = (0,-3,-1)$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$.

1) Montrer que $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2) On note $F = \mathrm{Vect}\,(b_1, b_2)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(b_3)$, que peut-on dire de F et G ?
3) Soit p le projecteur sur F parallèlement à G, exprimer $M = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(p)$.
4) Soit $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$, on note $N = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(p)$.
Calculer $P = \mathrm{Pa}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$, quelle est la relation entre M, N et P ?

Exercice 7 (*)
Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Exercice 8 (**)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^3 - A^2 - 4A = -4I_3$.
Calculer A^p pour tout $p \in \mathbf{N}$.

Exercice 9 (**)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Montrer que A et A' sont semblables et déterminer la matrice de passage.

Exercice 10 (**)
Les matrices $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ? Si oui, déterminer la matrice de passage.

Exercice 11 (**)
Montrer que toute matrice peut s'écrire comme la somme de deux matrices inversibles.

Exercice 12 (***)
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, telle que $A + A^{-1} = I_n$. Déterminer $A^k + A^{-k}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Exercice 13 (**)
Soient (u_n) et (v_n) deux suite définies par $u_0 = 2, v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 5u_n - 3v_n \\ v_{n+1} &= 6u_n - 4v_n \end{cases}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1) Donner une relation entre X_{n+1} et X_n en fonction d'une matrice A. En déduire une expression de X_n en fonction de A et de n.

2) Déterminer une base de $\ker(A + I_2)$ et de $\ker(A - 2I_2)$.

3) En déduire l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

4) Exprimer P.

5) Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 14 (***)
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
On dit que $\lambda \in \mathbf{K}$ est valeur propre de f s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ qui vérifie $f(x) = \lambda x$.

1) Soient $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbf{K}^k$ k valeurs propres distinctes de f.
Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note $x_i \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x_i) = \lambda_i x_i$.

   (a) Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in \mathbf{K}^k$ tel que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$.

   Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ $\sum_{i=1}^{k} P(\lambda_i)\,\alpha_i x_i = 0$.

   (b) Montrer que $(x_1, \cdots, x_k)$ forme une famille libre de E.

2) On suppose E de dimension finie égale à n et on suppose que $f \in \mathscr{L}(E)$ admet n valeurs propres distinctes.
Montrer qu'il existe une base de E en laquelle la matrice de f est diagonale.

3) On suppose toujours $\dim(E) = n$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbf{K}^k$ toutes les valeurs propres (distinctes) de f.
Montrer que f est diagonalisable (ie qu'il existe une base en laquelle la matrice de f est diagonale) si, et seulement si $\sum_{i=1}^{k} \dim(\ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})) = n$.

Exercice 15 (***)
Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ antisymétrique. Montrer que $A + I_n$ est inversible.

Calculs de déterminants

Exercice 16 (*)
Calculer

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 17 (*)
Calculer

$$\begin{vmatrix} (0) & & & a_n \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & (0) \end{vmatrix}.$$

Exercice 18 (*)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

où pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ on a $S_k = \sum_{i=1}^{k} i$.

Exercice 19 (**)
Calculer

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

Exercice 20 (**)
Calculer

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 21 (**)
Calculer

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 22 (**)
Calculer
$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 23 (**) (méthode)
Soit $a \in \mathbf{K}^*$. Pour tout $n \geqslant 1$, calculer le déterminant de taille n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 2a \end{vmatrix}.$$

Exercice 24 (**)
Soit $a \in \mathbf{K}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on définit le déterminant de taille n par :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 1 & & (0) \\ 1 & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Calculer Δ_n pour $a = -1$ et pour $a = 2$.

Applications linéaires

Exercice 25 (*)
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_n[X])$ défini par
$$f(P) = P + P'.$$
Calculer $\det f$, que peut-on en déduire ?

Exercice 26 (*)
Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel de dimension n et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

1) Calculer le déterminant du projecteur sur F parallèlement à G.

2) Calculer le déterminant de la symétrie sur F parallèlement à G.

Exercice 27 (**)
Pour $\sigma \in S_n$, on définit
$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \to & \mathbf{K}^n \\ (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & \left(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}\right). \end{array} \right.$$

1) Montrer que $u \in \mathrm{GL}(\mathbf{K}^n)$.

2) Calculer $\det(u)$.

Entraînement

Exercice 28 (anciennement CCINP 63)
Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1) Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

2) Déterminer D_n en fonction de n.

Exercice 29 (*)
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer que si $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ alors n est pair.

Exercice 30 (**)
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on définit $\chi_M = \det(XI_n - M)$.

1) Démontrer que $\chi_M \in \mathbf{K}_n[X]$.
Déterminer son terme de plus haut degré et son terme constant.

2) En déduire qu'il existe $k_M \in \mathbf{N}^*$ tel que
$$\forall k \geqslant k_M, \quad M - \frac{1}{k} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}).$$

Exercice 31 (**)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{Z})$ une matrice à coefficients entiers.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur son déterminant pour que A soit inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{Z})$ (que son inverse soit aussi à coefficients entiers).

Exercice 32 (**)
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $J \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1) Montrer que $\det(A + XJ) \in \mathbf{R}_1[X]$ et donner son terme constant.
X représente l'indéterminée des polynômes.

2) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ avec $\alpha \neq \beta$ et $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & (\alpha) \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ (\beta) & & & a_n \end{vmatrix}.$$

3) On suppose A antisymétrique et n pair. Montrer alors que

$$\det(A + XJ) = \det A.$$

Exercice 33 (***)
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \,.$$

1) Montrer que A est inversible.

2) On suppose de plus $\forall i \in \{1, ..., n\}\,, a_{i,i} > 0$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 34 (***)
On considère quatre matrices réelles de taille $n \geqslant 1$: A, B, C, D telles que D inversible et $CD = DC$.
On définit par blocs la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Montrer que
$$\det(M) = \det(AD - BC).$$

Montrer que ce résultat est encore vrai si D n'est pas inversible.

VII Espaces préhilbertiens et euclidiens

Produit scalaire

Exercice 1 (*)
Soit E espace euclidien muni du produit scalaire $< .,. >$.
Pour $a \in E$ non nul et $\lambda \in \mathbf{R}$, résoudre l'équation $< a, x >= \lambda$ d'inconnue $x \in E$.

Exercice 2 (*)
Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$.
On définit sur $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, l'application φ par

$$\varphi(x, y) = ax_1y_1 + 2x_1y_2 + bx_2y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_3y_3.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que φ soit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$.

Exercice 3 (*)
Dans $E = \mathbf{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle, on définit les vecteurs

$$u = (1, 1, 1),\ v = (0, 1, 0),\ w = (0, 0, 1).$$

1) Justifier que (u, v, w) est une base de E.
2) À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, obtenir une base orthonormale de E à partir de (u, v, w) (dans cet ordre).

Exercice 4 (*)
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbf{R}_+)$ une application positive ou nulle. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que

$$\forall n, p \in \mathbf{N}^2, \quad I_{n+p}^2 \leqslant I_{2n} I_{2p}.$$

Exercice 5 (**)
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire positive non identiquement nulle.
Soit $\eta \in [0, 1]$,

1) Montrer que
$$\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{\{X \geqslant \eta \mathbf{E}(X)\}})^2 \leqslant \mathbf{E}(X^2)\mathbf{P}(X \geqslant \eta \mathbf{E}(X)).$$
2) En déduire
$$\mathbf{P}(X \geqslant \eta \mathbf{E}(X)) \geqslant (1 - \eta)^2 \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}.$$

Exercice 6 (*)
Dans $\mathbf{R}^4$ muni de sa structure euclidienne usuelle,
on pose $F = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $v_2 = (0, 3, 1, -1)$.

1) Déterminer un système d'équations définissant $F^\perp$.
2) En déduire une base de $F^\perp$, puis une base orthogonale de $F^\perp$.

Exercice 7 (*) (Réciproque de Pythagore)
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, et x_1, x_2, $\cdots$, x_p, p vecteurs de E.

1) Si $p = 2$, démontrer la réciproque du théorème de Pythagore :

   « Si la somme des carrés des longueurs de deux côtés du triangle est égale au carré de la longueur du troisième, alors le triangle est rectangle et le troisième côté est l'hypoténuse. »

2) Ce résultat est-il encore vrai pour $p \geqslant 3$?
   À savoir : si $\left\| \sum\limits_{i=1}^{p} x_i \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} \|x_i\|^2$, alors la famille est orthogonale.

Exercice 8 (*)
Dans $\mathbf{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle, on définit les vecteurs

$$u = (1, 1, 1),\ v = (0, 1, 0),\ w = (0, 0, 1).$$

1) Justifier que (u, v, w) est une base de E.
2) À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, obtenir une base orthonormale de E à partir de (u, v, w) (dans cet ordre).

Exercice 9 (**)
Soit $(E, < .,. >)$ un espace préhilbertien réel, et $(e_1, e_2, \cdots , e_n)$ des vecteurs unitaires de E, tels que

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >^2 .$$

1) Montrer que $(e_1, e_2, \cdots , e_n)$ est une famille orthonormale de E.
2) Montrer que c'est une base de E.

Applications linéaires

Exercice 10 (***)
Sur $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ (avec $a<b$), pour tout $p \geqslant 1$, on définit

$$\|.\|_p : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & \mathbf{R} \\ f & \mapsto & \|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right.$$

Le but de cet exercice est de montrer le résultat admis dans le cours, à savoir que $\|\cdot\|_p$ est bien une norme sur E.

1) À quoi correspond $\|.\|_2$?
En déduire que $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$.

2) Pour généraliser cette relation, on pose $p>1$ et $q>1$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
On veut montrer l'inégalité de Hölder :

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

(a) Montrer que pour tous $(x,y) \in \mathbf{R}_+^2$,

$$xy \leqslant \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

(b) En déduire l'inégalité de Hölder.
Indication : On pourra commencer par la montrer pour des applications de « norme » 1.

3) Montrer que $\|.\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire (dite inégalité de Minkowski).
Indication : Appliquer l'inégalité de Hölder avec $(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p-1}$.

Exercice 11 (*)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E tel que

$$\forall (x,y) \in E^2, < f(x), y >=< x, f(y) > .$$

Montrer que $\operatorname{Im} f = (\ker f)^{\perp}$.

Exercice 12 (**)
Soit U un vecteur colonne de norme 1 pour le produit scalaire usuel.
On pose $P = UU^T$.
Montrer que P est une projection orthogonale sur un espace à déterminer.

Exercice 13 (**)
Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2.
Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$ tel que

$$\forall (x,\, y) \in E^2,\ (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0.$$

1) Montrer que pour tout $y \in E$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall x \in E,\ (f(x)|f(y)) = \lambda (x|y).$$

2) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in E,\ \|\alpha f(x)\| = \|x\| .$$

Exercice 14 (***)
Soient E, F deux espaces préhilbertiens,
$f : E \to F$ une application telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x-y\| .$$

Montrer que f est linéaire.

Inégalités

Exercice 15 (**)
Soit E un espace vectoriel euclidien et $\|.\|$ sa norme euclidienne.
Montrer qu'un projecteur est orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in E, \qquad \|p(x)\| \leqslant \|x\| .$$

Exercice 16 (**)
Dans $\mathbf{R}^n$, on définit $P = (p_{i,j})_{i,j}$ la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre. Montrer que

$$\left| \sum_{i,j} p_{i,j} \right| \leqslant n\sqrt{n}.$$

Exercice 17 (*) (Des calculs...)
Soit $E = \mathbf{R}[X]$, l'espace des polynômes réels.
On munit E du produit scalaire

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, orthonormaliser la famille $(1, X, X^2, X^3)$.

2) Calculer la distance de X^3 à $\mathbf{R}_2[X]$.

Exercice 18 (**)
Calculer
$$\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2}\int_0^\pi (\sin t - at - b)^2 \,\mathrm{d}t.$$

Entrainement

Exercice 19 (*)
Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ définie par l'équation cartésienne :
$$F=\left\{(x,\,y,\,z,\,t)\in\mathbf{R}^4,\; x+y-2z=0\right\}.$$
Déterminer la distance de $(1,\,1,\,0,\,1)$ à F.

Exercice 20 (**)
Soit $E=\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ muni du produit scalaire
$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 fg.$$

1) On pose $F=\left\{f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R}),\; f(0)=0\right\}$. Montrer que $F^\perp=\{0\}$.
2) On pose $G=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbf{R})$.
En s'aidant d'une intégration par parties, montrer que $G^\perp=\{0\}$.
3) Commenter.

Exercice 21 (**)
On a vu que pour un produit scalaire fixé, il est toujours possible d'orthonormaliser une base avec Gram-Schmidt.
Montrer que pour une base $(e_1,\,\cdots,\,e_n)$ de E fixée, il est possible de trouver un produit scalaire pour lequel cette base est orthonormale.

Exercice 22 (***)

1) Démontrer le théorème de Fréchet-Von Neumann-Jordan : « Une norme est euclidienne si, et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme. »
Indication : Utiliser une formule de polarisation symétrique et commencer par démontrer que $\langle x,2y\rangle=2\langle x,y\rangle$, puis $\langle x+x',y\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x',y\rangle$.
2) Démontrer que $(x,y)\mapsto|x|+2|y|$ est une norme sur $\mathbf{R}^2$, mais qu'elle n'est pas euclidienne.
3) Démontrer que $f\mapsto\int_0^1|f|$ est une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$, mais qu'elle n'est pas euclidienne.

Exercice 23 (***) (Matrice de Gram)
Soit E un espace euclidien de dimension p et $(x)=(x_1,\,\cdots,\,x_n)$ une famille de E. On définit la matrice de Gram par
$$G(x)=G(x_1,\,\cdots,\,x_n)=\left(\,(x_i|x_j)\,\right)_{(i,\,j)}.$$
et $\mathscr{G}(x)=\det\left(G(x)\right)$ son déterminant.

1) On note $\mathscr{B}=(e_1,\,\cdots,\,e_p)$ une base orthonormée de E. Pour $(x_1,\,\cdots,\,x_n)\in E^n$ on pose
$$P=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x_1,\,\cdots,\,x_n).$$
Montrer que $G(x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_n)=P^TP$.
2) (a) On suppose ici $n=p$. Montrer que $(x_1,\,\cdots,\,x_p)$ est une famille libre si, et seulement si $\mathscr{G}(x_1,\,\cdots,\,x_p)>0$.
   (b) Plus généralement, pour $n\leqslant p$, montrer que $(x_1,\,\cdots,\,x_n)$ est libre si, et seulement si $\mathscr{G}(x_1,\,\cdots,\,x_n)>0$.
3) On suppose que $(x_1,\,\cdots,\,x_n)$ est une famille libre de E.
On note $F=\mathrm{Vect}\,(x_1,\,\cdots,\,x_n)$.
Montrer que
$$d(x,\,F)^2=\frac{\mathscr{G}(x,\,x_1,\,\cdots,\,x_n)}{\mathscr{G}(x_1,\,\cdots,\,x_n)}.$$

Exercice 24 (***)
Soit $E=\mathbf{R}[X]$, l'espace des polynômes réels.
On munit E du produit scalaire
$$<P,Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$
Existe-t-il $A\in\mathbf{R}[X]$ tel que $\forall P\in\mathbf{R}[X],\;<P,A>=P(0)$.

Exercice 25 (**)
On note $\ell^1(\mathbf{N})$ l'ensemble des familles sommable indicées par $\mathbf{N}$ et $\ell^2(\mathbf{N})$ l'ensemble des familles de carré sommable (indicées par $\mathbf{N}$) et plus généralement, pour $p\in[1,\,+\infty[$, on note $\ell^p(\mathbf{N})$ l'ensemble des familles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que $\sum|u_n|^p$ converge. Et $\ell^\infty(\mathbf{N})$ l'ensemble des suites bornées. Soient $1<q<p<\infty$.

1) Montrer que ℓ^1 et ℓ^2 sont des espaces vectoriels.
2) Montrer que $\ell^1\subset\ell^2$.
3) Montrer que $\ell^1\subset\ell^q\subset\ell^p\subset\ell^\infty$.
4) Montrer que les inclusions sont toutes strictes.
5) Montrer que $(a,\,b)\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nb_n$ définit un produit scalaire sur ℓ^2.

Exercice 26 (**) (Mines)
Soit E un espace préhilbertien, de produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et de norme associée $\|\cdot\|$.
Soient $n \geqslant 1$, $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$ et $C > 0$.
On suppose que

$$\forall (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k\right\| \leqslant C.$$

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2 \leqslant C^2$.

Exercice 27 (IMT 2023)
On note $E = \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$.
Pour $(f, g) \in E^2$, on pose

$$(f|g) = \int_0^1 (fg + f'g').$$

On note $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \left\{f \in E \cap \mathscr{C}^2([0, 1], \mathbf{R}), f'' = f\right\}$.

1) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur E.
2) Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels, puis que $\{t \mapsto \mathrm{e}^t, t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\}$ est une base de W.
3) Montrer que W et V sont orthogonaux.
4) Pour $f \in E$, calculer $p_W(f)$ le projeté orthogonal de f sur W.
5) Montrer que V et W sont supplémentaires.

CCINP

Exercice 28 (CCINP 39-extrait)
On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1) (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.

2) On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$).
   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Exercice 29 (CCINP 76)
Soit E un espace préhilbertien de produit scalaire $(|)$ et de norme eucldienne associée $\|\cdot\|$.

1) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   Donner le cas d'égalité (avec démonstration).
2) Soit $E = \{f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbf{R}), \forall x \in [a, b], f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}, f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m.
   Déterminer la valeur de m.

Exercice 30 (CCINP 77)
Soit E un espace euclidien.
F, G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Montrer que $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.
2) Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3) Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 31 (CCINP 78)
Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1) Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Démontrer que: $\forall (x, y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2) *On rappelle qu'une application u est une isométrie si, et seulement si $\forall (x, y) \in E^2$, $\|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$.*
   Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 32 (CCINP 79)
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1) Soit h une fonction continue et positive de $[a,\, b]$ dans $\mathbf{R}$.
Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow h = 0$.

2) Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,\, b]$ dans $\mathbf{R}$.
On pose
$$\forall (f,\, g) \in E^2,\ (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$
Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3) Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant Cauchy-Schwarz.

Exercice 33 (CCINP 80)
Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

1) Démontrer que $(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fg$ définit un produit scalaire sur E.

2) Soit F, le sous-espace vectoriel engendré par $f\ : x \mapsto \cos(x)$ et $g\ : x \mapsto \cos(2x)$.
Déterminer le projeté orthogonal sur F de $u\ : x \mapsto \sin^2(x)$.

Exercice 34 (CCINP 81)
On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ l'application φ par $\varphi(A,\, A') = \operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
On note $\mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\, (a,\, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

1) Démontrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

2) Déterminer une base de $\mathscr{F}^\perp$.

3) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{F}^\perp$.

4) Calculer la distance de J à $\mathscr{F}$.

Exercice 35 (CCINP 82)
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.
On admet que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y_0 \in F$ tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.
Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $< A|A' >= aa' + bb' + cc' + dd'$.

1) Démontrer que $< \cdot|\cdot >$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

2) Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 36 (CCINP 92)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose $\forall (A,\, B) \in E^2,\ < A|B >= \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.

1) Prouver que $< .|. >$ est un produit scalaire sur E.

2) On note $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$. On note $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
On admet que $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

   (a) Prouver que $E = \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

   (b) Prouver que $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})^\perp = \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

3) Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
Déterminer $F^\perp$.

5– Probabilités

I Dénombrement

Pour commencer

Exercice 1 (*)
Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot

1) BONHEUR 2) TRAVAIL 3) ANAGRAMME

Exercice 2 (*)
Une urne contient 5 boules numérotées.
Combien y-a-t-il de tirages possibles dans chaque situation :

1) on tire 3 boules simultanément,
2) on tire 3 boules successivement avec remise,
3) on tire 3 boules successivement sans remise.

Exercice 3 (**) (méthode)
L'alphabet est composé de 6 voyelles et 20 consonnes.

1) Déterminer le nombre de mots distincts composés de 3 consonnes et 2 voyelles.
2) Faire de même en excluant les mots qui renferment 3 consonnes côte à côte.

Exercice 4 (*)
Combien utilise-t-on de chiffres 1 pour compter de 1 à 10 000 ?

Exercice 5 (**)
Soit $b \geqslant 2$. Combien faut-il de caractères pour écrire 10 000 en base b ?
Par exemple, il en faut 5 *en base* 10.

Au plus, au moins...

Exercice 6 (*)
Combien y-a-t-il de nombres à 5 chiffres (on ne met pas de 0 en premier chiffre)

1) au total
2) où 0 ne figure jamais.
3) où 0 figure une et une seule fois.
4) où 0 figure au plus une fois.
5) où 0 figure au moins une fois.

Exercice 7 (**)
Soit un jeu de 52 cartes, dont on tire 5 cartes. Dénombrer les mains

1) au total.
2) comprenant exactement un as.
3) comprenant au moins un valet.
4) comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame.

Injections

Exercice 8 (**) (méthode)
Un magasin propose des billes de 5 couleurs différentes. Donner le nombre de façons de remplir un sac avec 20 billes.
Méthode :
On choisit un ordre pour les 5 couleurs : $RBVOJ$.
On écrit les couleurs des billes les unes à la suite des autres, rassemblées par couleur

suivant l'ordre prédéfini et on sépare chaque couleur d'une autre par un trait.
Par exemple $RR - BBBBBB - V - -JJJJJJJJJJ$ (ici, la couleur O n'a jamais été choisie). On compte le nombre d'écritures possibles.

Exercice 9 (**)
Pour $n \in \mathbf{N}$ fixé, donner le nombre de solutions de l'équation $(x, y, z, t) \in \mathbf{N}^4$ de $x + y + z + t = n$.

Exercice 10 (***)
Soient $(n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$, avec $p \leqslant n$.

1) Donner le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

2) Donner le nombre d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Parties d'un ensemble

Exercice 11 (**) (Formule du capitaine)

1) Montrer, par un raisonnement de dénombrement, que pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
On pourra considérer des équipes de k joueurs dont un capitaine à constituer parmi un vivier de n candidats.

2) Généraliser la formule précédente en montrant, toujours par un raisonnement de dénombrement
$$\binom{p}{k}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}.$$
On pourra aussi vérifier la formule par le calcul.

Exercice 12 (**)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note P_n le nombre maximum de régions en lesquelles on peut séparer le plan avec n droites distinctes.

1) Donner une relation de récurrence linéaire (à coefficients non constants) vérifiée par la suite (P_n). *On ne demande pas la justification formelle pour obtenir géométriquement le bon nombre de régions.*

2) Donner la valeur de P_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 13 (***)

1) Si $\operatorname{Card}(E) = n$, combien peut-on définir de relations binaires sur E ?

2) Parmi celles-ci, combien sont
   (a) Réflexives ?
   (b) Symétriques ?
   (c) Réflexives et symétriques ?

Exercice 14 (***)
Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1) Combien existe-t-il de couples (A, B) formant une partition de E en deux parties ?

2) Combien existe-t-il de couples (A, B) formant un recouvrements de E en deux parties (ie de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \cup B = E$) ?

Entraînement

Exercice 15 (**)
Soit un tableau de 9 cases de long par 4 cases de haut. On se déplace le long des arêtes uniquement vers le bas ou vers la droite.

1) Combien y a-t-il de chemins possibles pour aller du coin en haut à gauche au coin en bas à droite.

2) Si on place un point C sur le quadrillage, combien de ces chemins passent par C ?

3) Retrouver la formule de Vandermonde :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

Exercice 16 (**)
Dans le développement de $(a + b + c)^{2000}$,

1) quel est le coefficient devant $a^{1000}b^{996}c^4$?

2) quel est le coefficient devant $a^{1980}b^{15}c^3$?

Exercice 17 (***)
De combien de façons peut-on payer 100€ avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes.

Exercice 18 (***)

1) Soient A, B, C trois ensembles finis.
Déterminer une formule du crible pour $\operatorname{Card}(A \cup B \cup C)$.

2) Pour $(A_i)_{i\in[\![1,\,n]\!]}$, n ensembles finis.
Déterminer *la* formule du crible pour $\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$. On pourra faire intervenir la notation $I_k(n)$ pour désigner l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1,\,n]\!]$.
On pourra la démontrer par récurrence.

3) Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\sigma(n)$ les permutations de $[\![1,\,n]\!]$.
Un dérangement de $[\![1,\,n]\!]$ est une permutation $s \in \sigma(n)$ sans point fixe, c'est-à-dire telle que $\forall i \in [\![1,\,n]\!],\ s(i) \neq i$.
On note D_n l'ensemble des dérangements de $[\![1,\,n]\!]$ et $d_n = \operatorname{Card} D_n$.
Par convention, on pose $d_0 = 1$.

   (a) Calculer d_1, d_2.

   (b) Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

   (c) En considérant le complémentaire de D_n dans $\sigma(n)$, montrer que

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Exercices CCINP

Exercice 19 (CCINP 112)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.

2) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.

3) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

II Probabilités sur un univers fini

Les applications numériques peuvent se faire à la calculatrice.

Retour au dénombrement

Exercice 1 (*) (Le chevalier de Méré)
Selon Pascal, le chevalier de Méré « avait très bon esprit mais n'était pas très bon géomètre ». C'était un joueur impénitent toujours à la recherche d'astuces pour avoir un avantage sur ses adversaires. Voici deux de ses règles, les commenter (à l'aide de la calculatrice).

1) Il est avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un 6 en lançant un dé 4 fois de suite.

2) Il est avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un double 6 en lançant deux dés 24 fois de suite.

3) À partir de combien de lancers au minimum est-il intéressant de parier sur l'apparition d'un double 6 ?

Exercice 2 (**) (Yam's)
Julia est férue du jeu de Yam's.
Le jeu consiste à lancer 5 dés simultanément, et un yams est obtenu lorsque les 5 dés ont la même valeur.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir un yams ?

2) À partir de combien de lancers au minimum Julia a-t-elle plus d'une chance sur deux d'avoir obtenu au moins un yams ?

3) Supposons que Julia ait obtenu k dés identiques au premier lancer. Elle les conserve et relance les autres. Quelle est la probabilité qu'elle obtienne alors un yams ?

4) En particulier, si les 5 dés donnent des valeurs différentes au premier lancer. A-t-elle intérêt à les relancer tous ou plutôt à en conserver un si elle souhaîte obtenir un yams ?

Exercice 3 (**) (Poker)
On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants :

1) Obtenir exactement deux as dans ma main.

2) Obtenir une main qui comprend au moins deux as.

3) Obtenir une main qui contient (au moins) une paire d'as sachant que j'avais déjà subtilisé un as du jeu dans ma manche (j'ai donc six cartes).

4) Obtenir une main avec au moins une paire.

5) Obtenir un flush (les 5 cartes de la même couleur).

Exercice 4 (**)
On tire simultanément 8 cartes d'un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants :

1) Obtenir exactement deux cœurs.

2) Obtenir au plus deux cœurs.

3) Obtenir au moins deux cœurs.

4) Obtenir exactement deux cœurs et un valet.

5) Obtenir au moins « un cœur ou un valet ».

6) Obtenir au moins un cœur et au moins un valet.

Exercice 5 (**)
On tire 4 cartes d'un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir « 4 cartes toutes de la même couleur ou une de chaque couleur » si

1) on tire les 4 cartes simultanément,

2) on tire les 4 cartes successivement sans remise,

3) on tire les 4 cartes successivement avec remise.

Exercice 6 (**)
Un jeu de cartes est truqué : on a remplacé dans ce jeu, une carte autre que l'as de pique par un second as de pique.
On tire simultanément 4 cartes.

1) Quelle est la probabilité de déceler la supercherie ?

2) On recommence n fois l'expérience (en remettant à chaque fois les 4 cartes dans le jeu). Quel est le nombre minimum d'expériences à réaliser pour découvrir la supercherie avec une probabilité supérieure à 0,95.

Exercice 7 (**) (Anniversaire)

1) Dans la classe (40 étudiants) quelle est la probabilité qu'un étudiant ait son anniversaire le même jour que l'enseignant ? Donner une valeur approchée.

2) Quelle est la probabilité que deux étudiants aient leur anniversaire le même jour ? Donner une valeur approchée.

Espaces probabilisés

Exercice 8 (Pour commencer)
Soit $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$,

1) Déterminer une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω, tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(\{k\})$ soit proportionnel à k.

2) Déterminer une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω, tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(\{1, 2, \cdots, k\})$ soit proportionnel à k^2.

3) Déterminer une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω, tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(\{k\})$ soit proportionnel à k^2.

Événements indépendants

Exercice 9 (*)
On lance un dé à six faces parfaitement équilibré. Les événements suivants sont-ils indépendants ?

A : « on obtient le tirage 2, 4 ou 6 »,
B : « on obtient le tirage 3 ou 6 ».

Exercice 10 (*)
Soient A_1, A_2, $\cdots$, A_n des événements mutuellement indépendants.
Montrer que si $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1$, alors il existe $i \in [\![1,\, n]\!]$ tel que $\mathbf{P}\left(A_i\right) = 1$.

Exercice 11 (**)
Montrer qu'un événement A est indépendant de tout autre événement si et seulement si $\mathbf{P}(A) = 0$ ou 1.

Probabilités conditionnelles

Exercice 12 (**)
Soient A et B deux événements avec $\mathbf{P}(A) > 0$. Comparer les probabilités conditionnelles

$$\mathbf{P}_{A\cup B}\left(A \cap B\right) \text{ et } \mathbf{P}_{A}\left(A \cap B\right).$$

Exercice 13 (*)
On classe des gérants de portefeuille en deux catégories : les bien informés et les autres. Lorsqu'un gérant bien informé conseille son client sur une valeur boursière, la probabilité que le cours de cette action suive ses prédictions est de 0,8. Si le gérant est mal informé, la probabilité que le cours ne suive pas ses prédictions est 0,6.
Pour un gérant fixé, les événements suivants lesquels les cours suivent ou non les prédictions sont mutuellement indépendants.
On sait par ailleurs que si l'on choisit au hasard un gérant de portefeuille, il y a une chance sur 10 pour que celui ci soit un gérant bien informé.
Un client choisit au hasard un gérant qui lui propose une position sur une valeur.

1) Sachant que le cours de cette valeur a suivi les prédictions du gérant, quelle est la probabilité pour que ce gérant soit mal informé ?

2) Le gérant informe le client dix fois sur des valeurs, et ses informations se sont révélées justes les dix fois.
Il propose à présent une position sur une nouvelle valeur. Quelle est la probabilité qu'il ait raison.

Exercice 14 (**) (Le caméléon)
Un caméléon daltonien posé sur du vert prend soit la couleur verte, soit la couleur rouge, avec la même probabilité. Quand il est posé sur du rouge, il prend soit la couleur verte une fois sur cinq, soit la couleur rouge quatre fois sur cinq.
Laurine étale chaque matin sa couverture bicolore sur l'herbe, une fois sur trois côté rouge visible, deux fois sur trois côté vert visible.
Un couple[1] de caméléon daltoniens vient s'ébattre sur sa couverture.

1) Calculer la probabilité qu'ils soient de la même couleur.

2) Les événements « le caméléon mâle est vert » et « le caméléon femelle est vert » sont-ils indépendants ?

3) Sachant qu'ils sont de couleurs différentes, calculer la probabilité que la face apparente de la couverture soit rouge.

Exercice 15 (*) (Bluff ?)
Vous jouez au poker. C'est le dernier tour de mise, il ne reste plus que Jérémie en face de vous. Il y a 540 dans le pot et Jérémie relance encore 200 par dessus. Vous hésitez à le suivre. Vous savez que la probabilité qu'il bluffe est de 25%. Lorsqu'il bluffe, il relance 9 fois sur 10, par contre, lorsqu'il ne bluffe pas, il ne relance que 6 fois sur 10.

1) Quelle est la probabilité qu'il bluffe ?

2) (*avec le cours de terminale*) Avez-vous intérêt à le suivre (sachant que vous gagnez uniquement s'il bluffe) ?

[1] Pour une couleur de couverture fixée, et malgré l'amour fou qui lie les deux caméléons, leurs deux couleurs respectives sont indépendantes entre elles.

Chaîne de Markov

Exercice 16 (**)
Un fumeur cherche à arrêter de fumer chaque jour. On note p_n la probabilité qu'il fume le n-ième jour.

- S'il a réussi à ne pas fumer un jour, il ne fume pas le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$.
- S'il fume un jour, il ne fume pas le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

1) Calculer p_{n+1} en fonction de p_n.

2) Calculer p_n en fonction de p_1 et de n.

3) Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Casse-tête

Exercice 17 (*)
Une famille a deux enfants.

1) Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?

2) Quelle est cette probabilité sachant que l'aîné est un garçon ?

3) On sait que l'un des deux enfants est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre le soit aussi ?

4) (*** *) On sait que l'un des deux enfants est un garçon et né un 29 février, quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

Exercice 18 (***) (Le jeu des trois portes)
Dans le jeu « Let's make a deal », trois portes A,B, C sont fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une Ferrari, derrière les autres, une chèvre.

- Le joueur choisit une porte, disons A.
- Le présentateur sait où se trouve la voiture, et l'informe (sans mentir) qu'elle n'est pas derrière la porte B puis il lui offre la possibilité de réviser son choix.

Le joueur a-t-il intérêt à réviser son choix ?
On suppose que le joueur est davantage attiré par la Ferrari que par la chèvre et que le présentateur ne va jamais indiquer au joueur qu'il se trompe.
Indication[2]

[2] Une fois que la porte A a été choisie, poser A: « la Ferrari est derrière la porte A » ; de même pour B et C. Poser I : « le présentateur indique qu'elle n'est pas derrière la porte B ».

Exercices CCINP

Exercice 19 (CCINP 105)

1) Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

2) On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.

   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé?

   (b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé?

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 20 (CCINP 107)
On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes:
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche »
et on pose $p_n = \mathbf{P}(B_n)$.

1) Calculer p_1.

2) Prouver que : $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.

3) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

III Variables aléatoires finies

Les applications numériques peuvent se faire à la calculatrice.

Pour commencer

Exercice 1 (*)
On propose le jeu suivant :
Pour pouvoir jouer, il faut d'abord verser 1€, puis on jette deux dés simultanément.

- Si l'un des dés au moins présente un chiffre impair, on ne gagne rien.
- Si les dés présentent deux chiffres pairs différents, on gagne 1€.
- Enfin, si les dés présentent le même chiffre pair, on gagne une somme égale au total des points des deux dés.

Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 2 (*) (Prédictions)
Madame Irma affirme qu'elle peut prédire le sexe des enfants à naître. Elle demande 5€ pour cette prédiction. De plus, en cas de prédiction erronée, elle s'engage à rembourser intégralement la somme perçue.
Si madame Irma trouve 1000 clients, quel gain moyen peut-on lui prédire ?

Exercices types

Exercice 3 (**) (Le bonneteau)
On dispose de n gobelets (opaques) mis à l'envers devant soi. Un billet se trouve sous l'un d'eux.
On retourne les gobelets un à un jusqu'à trouver le billet.
Quelle est la probabilité de trouver le billet au k-ième essai ?

Exercice 4 (**) (Transmission bruitée)
Une information est transmise sous forme d'une suite de 0 et de 1. L'existence d'un bruit lors du transport peut transformer un 1 en 0 et vice-versa avec une probabilité $1-p$. Le bruit agit de façon indépendante sur chaque caractère de la suite.
Pour se prémunir des effets du bruit, on transmet trois fois le même message. À la réception, s'il y a une majorité de 1, on considère que l'information est 1, sinon c'est 0.

1) Pour un message avec un seul caractère,
   (a) quelle est la probabilité que la réception soit juste ?
   (b) À quelle condition sur p, la fiabilité de réception est-elle meilleure avec un triple envoi qu'avec l'envoi simple ?
2) Pour un message à n caractères, quelle est la probabilité que le message soit juste ?
3) Quel est le nombre moyen de caractères justes à la réception pour une suite de n caractères.

Exercice 5 (**)
On s'intéresse à la proportion de personnes dans le monde qui vivent sous le seuil de pauvreté. On note p cette proportion.
Pour évaluer p, on sonde un nombre n de personnes prises au hasard et on obtient un nombre X de réponses favorables. On veut savoir combien de personnes on doit sonder pour réduire notre marge d'erreur dans l'estimation de p.
Donner une valeur de n à partir de laquelle la probabilité de l'événement $\left\{\left|\frac{X}{n}-p\right| \geqslant 0,05\right\}$ est inférieure à 10% ?

Entraînement

Exercice 6 (*)

Soit $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ avec $p \in]0,1[$, on pose $Y = \dfrac{1}{1+X}$.

1) Donner la loi de Y.

2) Montrer que $\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{n+1}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, avec $q = 1-p$

Exercice 7 (*)

Un sac contient n jetons ($n \geqslant 17$) dont 5 rouges et 10 blancs. Les autres sont verts. Un joueur tire un jeton au hasard.
S'il est rouge, il gagne 5€ ; s'il est blanc, il perd 3€ ; s'il est vert, il effectue un nouveau tirage sans remettre le jeton.
Si le second tirage donne un jeton rouge, il gagne 4€, s'il est blanc il perd 1€, s'il est encore vert la partie est nulle et s'arrête.
Soit X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur.

1) Établir en fonction de n la loi de probabilité de X.

2) Calculer $\mathbf{E}(X)$. Pour quelle valeur de n, le jeu est-il équitable ?

Exercice 8 (**)

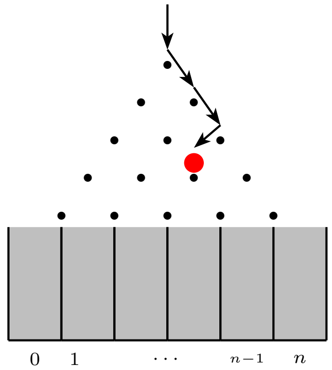
Une urne contient six boules numérotées de 1 à 6. On en tire trois simultanément. Soit X la variable aléatoire égale au plus petit des nombres obtenus.

1) Établir la loi de X.

2) Calculer $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$ et σ(X).

Exercice 9 (**) (Planche de Galton)

La planche de Galton est une planche sur laquelle sont plantés des clous suivant un schéma pyramidal.
On fait tomber des billes qui ont pour chaque clou, autant de chance de passer à droite qu'à gauche.
En bas de la pyramide, chaque bille remplit un tube en fonction de la colonne d'arrivée.



On numérote de 0 à n (de gauche à droite) les tubes en bas de la pyramide.
On note X la variable aléatoire correspondant au tube d'arrivée de la boule.

1) Exprimer la valeur de X en fonction du trajet suivi par la boule, en déduire la loi de X.

2) Donner $\mathbf{E}(X), \mathbf{V}(X)$.

Exercice 10 (**)

Une urne contient b boules blanches, n boules noires.
On effectue des tirages successifs. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne en y rajoutant a boules de la même couleur.
On répète l'expérience à chaque tirage.
On note B_i l'événement « obtenir une boule blanche au tirage i », et
N_i l'événement « obtenir une boule noire au tirage i ».
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable de Bernoulli qui détermine si la boule tirée au rang i est blanche.
On considère pour $p \in [\![2, n]\!]$, la variable aléatoire Z_p, définie par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1) Que représente la variable Z_p ?
   Donner l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.

2) Donner la loi de X_1 et son espérance $\mathbf{E}(X_1)$.

3) Déterminer la loi de X_2 et son espérance $\mathbf{E}(X_2)$.

4) Déterminer la loi de probabilité de Z_2.

5) Soit $p \leqslant n-1$.

(a) Déterminer $\mathbf{P}_{Z_p=k}(X_{p+1}=1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.

(b) En déduire que
$$\mathbf{P}(X_{p+1}=1)=\frac{b+a\mathbf{E}(Z_p)}{b+n+pa}.$$

(c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
Indication : On raisonnera par récurrence forte sur p.

6) Retrouver le même résultat par récurrence à l'aide des probabilités totales suivant X_1.

7) (a) Pour $p, q \in \mathbf{N}$, déterminer la probabilité d'obtenir d'abord p boules blanches puis q boules noires.
(b) Déterminer la probabilité d'obtenir exactement p boules blanches en $p+q$ tirages.
(c) Préciser cette valeur pour $b=n=a$.

Exercice 11 (***)
On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
On définit une suite $(U_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires avec $U_1=1$ et pour $i \geqslant 2$,

- $U_i=1$ si au i-ème tirage, on obtient un numéro qui n'a été obtenu à aucun des $i-1$ tirages précédents,
- $U_i=0$, sinon.

Pour $i \geqslant 1$, on définit T_i la variable aléatoire égale au numéro obtenu au i-ème tirage.

1) Donner la loi de U_2.

2) (a) Pour $i \geqslant 1$, donner la loi de T_i.
(b) À l'aide des probabilités totales, montrer que
$$\forall i \in \{2,\cdots,n\}, \mathbf{P}(U_i=1)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}.$$
(Vérifier que la cette formule reste valable pour $i=1$.)

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note $V_k(n)$ la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.

3) (a) Exprimer $V_k(n)$ en fonction des variables U_i.
(b) En déduire l'espérance de $V_k(n)$.
(c) Calculer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{E}(V_k(n))$ et $\lim\limits_{k\to+\infty}\mathbf{E}(V_k(n))$.
Interpréter.

Exercice 12 (***) (QCM à un examen)
Un candidat doit passer un test par QCM comprenant 20 questions. Pour chaque question, le candidat a le choix entre deux réponses : une bonne et une mauvaise.
Les règles de notation sont les suivantes : une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse -1 point et une question laissée sans réponse rapporte 0 point. Le candidat est reçu s'il obtient au moins 10 points.
On suppose que le candidat connaît avec certitude les réponses aux 9 premières questions, mais n'a aucune idée des réponses aux 11 questions restantes.
Il choisit de répondre à k réponses parmi celles-ci.

1) Donner la probabilité qu'il soit reçu si $k=1$, si $k=2$.

2) On suppose k impair.
(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=\frac{k+1}{2}}^{k}\binom{k}{i}=2^{k-1}$.
(b) Donner la probabilité que le candidat soit reçu.

3) Si k pair, donner la probabilité que le candidat soit reçu (en fonction de k).

4) En déduire la meilleure et la pire stratégie pour le candidat.

Exercice 13 (CCINP 109)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1) Déterminer la loi de X.

2) Déterminer la loi de Y.

Approfondissement

Exercice 14 (***)
On lance 6000 fois un dé et on obtient 1105 fois le nombre 6. Est-ce normal ?

Exercice 15 (***)
Dans ce jeu, vous êtes face à votre adversaire, autour d'une table. Chacun des deux joueurs doit initialement cacher ses mains sous la table, puis, brusquement, montrer l'une des deux.
Si chacun a montré la main droite, votre partenaire vous donne 3€.
Il vous en donne 2 si chacun a montré la main gauche.
Si, par contre, vous montrez la main droite et lui la gauche, donnez-lui 1€,
et si enfin, vous montrez la main gauche alors qu'il montre la droite, donnez-lui 4€.
Si vous jouez de nombreuses fois à ce jeu avec astuce (mais sans tricher), vous pouvez être sûr de gagner de l'argent.
Comment procédez-vous ?

IV Couples et vecteurs de variables aléatoires

Mises en situation

Exercice 16 (**)

1) On lance deux dés normaux, on note X_1 et X_2 leur résultats respectifs et $X = \max(X_1, X_2)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X sans calculer sa loi.
   (b) En déduire la loi de X.
   (c) Obtenir la loi de X directement par disjonction des cas selon les valeurs de X_1 et X_2.
2) De même avec 3 dés, donner la loi du maximum des trois.

Exercice 17 (**)
Dans une urne qui contient n jetons numérotés de 1 à n, on tire successivement (sans remise) deux jetons. On note X_1 le premier numéro, et X_2 le second numéro.

1) (a) Décrire l'univers image du couple (X_1, X_2).
   (b) Donner la loi du couple (X_1, X_2).
   (c) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X_1, X_2)$.
   (d) Les variables aléatoires sont-elles indépendantes.
2) On note $X = \min(X_1, X_2)$ et $Y = \max(X_1, X_2)$.
   (a) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   (b) Donner l'univers du couple (X, Y).
   (c) Déterminer la loi conjointe de (X, Y). Vérifier que l'on retrouve bien les lois marginales à partir de la loi conjointe.
3) On pose $Z = Y - X$.
   (a) Déterminer l'univers image de Z.
   (b) Déterminer la loi de Z.

Exercice 18 (*)
Un Boeing 787-8 transporte 230 passagers et leurs bagages. Il pèse 190 tonnes sans passagers ni bagages mais avec l'équipage et plein de carburant.
William, son commandant de bord, nous indique que les consignes de sécurité interdisent le décollage si le poids de l'appareil dépasse 220 tonnes. Les 230 places ont été réservées et on sait que le poids d'un passager suit une loi d'espérance 68kg et d'écart type 10kg.
On admet que le poids des bagages suit une loi d'espérance égale à 18kg et d'écart type 7kg et que ces variables sont indépendantes.

1) X est la variable aléatoire égale au poids de l'appareil lors du décollage, calculer $\mathbf{E}(X)$ et σ_X.
2) Déterminer un majorant de la probabilité que l'appareil n'ait pas l'autorisation de décoller.

Exercice 19 (**)
Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n.
Une urne U_2 contient des boules dont une proportion p de boules rouges.
On tire au hasard une boule dans U_1 et on note X la variable aléatoire égale au numéro tiré.
On tire ensuite, autant de boules dans l'urne U_2 (avec remise) que le numéro obtenu pour X. On note Y le nombre total de boules rouges obtenues.

1) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2) Déterminer la loi de Y sachant $[X = k]$.
3) Déterminer la loi du couple (X, Y).
4) Que vaut la covariance $\mathbf{Cov}\,(X, Y)$?

Exercice 20 (**)
On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1) Donner la loi conjointe du couple (X, Y).
2) Calculer $\mathbf{P}\,(X = Y)$.
3) Calculer l'espérance de Y.
4) Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

Exercices théoriques

Exercice 21 (*)
Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.

1) Donner l'espérance de leur somme.
2) Donner l'espérance de leur minimum.

Exercice 22 (*)
Soit X dont la loi est donnée par $\mathbf{P}(X=0)=1/6$, $\mathbf{P}(X=1)=\mathbf{P}(X=-1)=1/4$ et $\mathbf{P}(X=2)=P(X=-2)=\frac{1}{6}$.
On pose $Y=X^2$.

1) Donner la loi du couple (X,Y). En déduire la loi de Y.
2) Calculer $\mathbf{Cov}(X,Y)$.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 23 (**)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et X une variable aléatoire qui suite une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On pose $Y=(X+1)^2$.
Calculer $\mathbf{Cov}(X,Y)$.

Exercice 24 (**)
Soient X et Y deux variables aléatoires qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2.

1) Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $[X=1]$ et $[Y=1]$ sont indépendants.
2) En déduire que les variables sont indépendantes si, et seulement si elles sont décorrélées.

Exercice 25 (**) (classique)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
On considère une suite $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
On pose $X = \min_{i\in[\![1,n]\!]}(X_i)$ et $Y=\max_{i\in[\![1,n]\!]}(X_i)$ et

1) S'il existe $p \in]0,1[$ tel que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.
   (a) Déterminer les lois de X et de Y.
   (b) Donner les espérances $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.
2) S'il existe $N \geqslant 2$ tel que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,N]\!])$ (la loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$),
   (a) Déterminer les lois de X et de Y.
   (b) Montrer que X et $N+1-Y$ suivent la même loi. En déduire l'espérance de $X+Y$.

Exercice 26 (**)
Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p et indépendantes.

1) Pour $n\in\mathbf{N}$, on pose $Y_n = X_nX_{n+1}$, déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2) Soit $(i,\, j)\in\mathbf{N}^2$, calculer $\mathbf{Cov}(Y_i,Y_j)$.

Exercice 27 (**)
Soient $0<p<1$ et $q=1-p$.
$(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.
Pour $k\in[\![1,n]\!]$, on note $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1) Calculer pour $k\in[\![1;n]\!]$, $\mathbf{Cov}(Y_k,Y_{k+1})$
2) Montrer que $0<\mathbf{Cov}(Y_k,Y_{k+1})\leqslant \frac{1}{4}$
3) Calculer pour tout $1\leqslant k<l\leqslant n$, $\mathbf{Cov}(Y_k,Y_l)$
4) (***) Soit $\varepsilon>0$ fixé, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k-2p\right|>\varepsilon\right)=0.$$

Exercice 28 (**)
Soit X une variable aléatoire d'espérance m et de variance σ inconnues. On dispose d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, mutuellement indépendantes et toutes de même loi que X.
Pour θ un paramètre lié à la loi X (par exemple son espérance ou sa variance), on dit qu'une variables aléatoire θ_n obtenue à partir de $X_1, X_2, \cdots X_n$ est un *estimateur sans biais* de θ si, $\mathbf{E}(\theta_n)=\mathbf{E}(\theta)$.

1) On pose $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$.
Montrer que M_n est un estimateur sans biais de l'espérance de X.
2) On pose $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)^2$.
Montrer que T_n est un estimateur sans biais de la variance $\mathbf{V}(X)$.

3) (***) On pose $\widetilde{T_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M_n)^2$.
Montrer que $\widetilde{T_n}$ est un estimateur de $\mathbf{V}(X)$ avec biais, et en déduire un estimateur sans biais simple de $\mathbf{V}(X)$ qui n'utilise pas la valeur de m.

Exercice 29 (***)

1) Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,+1\}$.
Montrer la propriété suivante : Pour tout triplet $(a,b,c) \in \{-1,+1\}^3$,
$\mathbf{P}_{[Y=b]}(X = a \cap Z = c)$=$\mathbf{P}_{[Y=b]}(X = a)\,\mathbf{P}_{[Y=b]}(Z = c)$

2) Comment construire un triplet (X, Y, Z) de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,+1\}$, *non indépendantes*, telle que la propriété soit satisfaite avec

$$\mathbf{P}(X = a \text{ et } Y = b \text{ et } Z = c) > 0$$

pour tout triplet $(a,b,c) \in \{-1,+1\}^3$?

Indication : On pourra par exemple choisir la même expression pour les lois conditionnelles de X sachant $Y = b$ et de Z sachant $Y = b$.

Exercice 30 (Marche aléatoire)
Une puce se déplace aléatoirement dans le plan suivant le protocole suivant :

- À l'instant 0, elle se trouve au point $(0, 0)$.
- À chaque instant, elle effectue un déplacement de longueur 1 dans l'une des quatre directions suivante (choisie au hasard) : est, ouest, nord ou sud.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note X_n l'abscisse de la puce, Y_n son ordonnée et Z_n sa distance à l'origine.

1) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer l'espérance et la variance de X_n.

2) Déterminer de même, $\mathbf{E}(Y_n)$ et $\mathbf{V}(Y_n)$.

3) Calculer $\mathbf{E}\left(Z_n^2\right)$.

4) Montrer alors qur pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $|\mathbf{E}(Z_n)| \leqslant \sqrt{n}$.

CCINP

Exercice 31 (CCINP 95)
Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

2) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

   (a) Déterminer la loi de X.

   (b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 32 (CCINP 98)
Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1) Donner la loi de X. Justifier.

2) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(Y = k | X = i)$.

   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication :
   on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 33 (CCINP 99)

1) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $Y_n \in L^2$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   Prouver que :

$$\forall a \in]0, +\infty[\,,\ \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbf{E}(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(Y_1)}{na^2}.$$

3) **Application**: On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Exercice 34 (CCINP 104)
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1) Préciser les valeurs prises par X.

2) (a) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

3) (a) Calculer $\mathbf{E}(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{E}(X)$. Interpréter ce résultat.