TD 1 SUR LES MATRICES

Le premier exercice présente trois méthodes à connaître.
Le second exercice est très classique et intervient souvent dans des sujets de concours (écrit ou oral).
Le dernier exercice est un petit développement amusant, mais ne fait pas partie des *indispensables.*

Exercice 1
On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$u_0 = 4, \quad v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n) \\ v_{n+1} &= \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases}.$$

Les trois méthodes de résolution sont indépendantes et à traiter comme telles.

1) Méthode 1

- **(a)** Montrer que les deux suites sont adjacentes.
- **(b)** En déduire leur limite (avec le nombre minimal de calculs).

2) Méthode 2

- **(a)** Écrire la relation sous forme matricielle : $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
- **(b)** Calculer les puissances successives de A.
- **(c)** En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.
- **(d)** Montrer que les suites convergent et déterminer leur limite.

3) Méthode 3

- **(a)** Trouver une relation de récurrence d'ordre 2 pour u.
- **(b)** En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
- **(c)** Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

Exercice 2 (Exponentielle d'une matrice)
Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer A^2 et A^3 et en déduire A^n pour tout $n \geqslant 3$.

2) Pour tout réel t, on définit la matrice $E(t)$ par :

$$E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2.$$

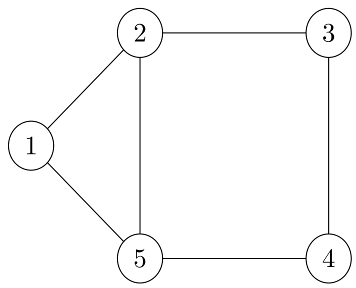
où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

- **(a)** Montrer que :
$$\forall (t, t') \in \mathbf{R}^2, \qquad E(t)\,E(t') = E(t + t').$$
- **(b)** Calculer $E(0)$.
En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $I_3,\ A,\ A^2,\ t$.
- **(c)** Pour tout réel t et pour tout entier naturel n, déterminer une expression simple de $[E(t)]^n$ en fonction de $I_3,\ A,\ A^2,\ t$ et n.

Exercice 3 (Le problème de l'interrupteur)

D'après Michel Burlet

On représente un schéma électrique par un graphe (sans boucle sur un même sommet).
Sur chaque sommet se trouve une ampoule et un interrupteur. L'interrupteur commande l'ampoule du sommet, et celles des sommets voisins.
L'appui sur un interrupteur fait passer les ampoules commandées à l'état contraire : d'allumé à éteint et d'éteint à allumé.



Par exemple, l'appui sur l'interrupteur 5 commande les lampes 1, 2, 4 et 5.
Au départ, toutes les lampes sont éteintes, et les interrupteurs en position basse.
Existe-t-il une combinaison d'interrupteurs à actionner pour que toutes les lampes soient allumées ? Laquelle ?
Pour répondre à cette question, nous allons travailler dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. C'est-à-dire les nombres binaires qui correspondent à l'état de la lampe ou de l'interrupteur.

- pour une ampoule : 1 correspond à allumé et 0 à éteint.
- pour un interrupteur : 1 pour une position haute, et 0 sinon.

L'état des interrupteurs est décrit par un n-uplet.
Ainsi, pour n interrupteurs, $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ donne l'état des n-interrupteurs.
De même $(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n)$ désigne l'état des n ampoules.
On définit l'opération $+$ sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ par :

$$0 + 0 = 0, \quad 1 + 1 = 0, \quad 1 + 0 = 0 + 1 = 1.$$

De telle sorte que la somme des états des interrupteurs adjacents à l'ampoule, donne l'état de cette ampoule :
Par exemple

$$x_1 + x_2 + x_5 = \ell_1.$$

1) Donner l'ensemble des équations qui définissent l'état des lampes.

2) À l'aide d'opération sur les lignes, en déduire la solution au problème.