

MATRICES

1 PRODUIT MATRICIEL

Exercice 1 (*)

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer (s'ils ont un sens) les produits

$$AB, BA, AC, CA, BC, CB, B^2.$$

Exercice 2 (**)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Trouver toutes les matrices colonne u telles que

$$Au = 3u.$$

Exercice 3 (**)

Montrer que si la matrice A possède une ligne nulle, alors AB possède une ligne nulle.

2 MATRICES QUI COMMUTENT

Exercice 4 (**)

Pour A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note

$$\text{Com}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}), MA = AM\}$$

$\text{Com}(A)$ désigne l'ensemble des matrices qui commutent avec A , c'est le *commutant* de A .

1. Montrer que $\text{Com}(A) \neq \emptyset$.
2. Montrer que si $M, N \in \text{Com}(A)$, alors

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, \quad \lambda M + \mu N \in \text{Com}(A).$$

3. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, déterminer $\text{Com}(A)$.

Exercice 5 (*)

Soit $(a, b) \in (\mathbf{R}^*)^2$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ qui commutent avec A , c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 6 (**)(méthode)

Résoudre l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

*Indication*¹

Exercice 7 (**)

Résoudre l'équation

$$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

1. On pourra remarquer que A et X commutent.

Exercice 8 (***)

Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 9 (***)

Trouver toutes les matrices A qui commutent avec les matrices symétriques.

S'inspirer de l'exercice 8.

3 PUISSANCES

Exercice 10 (**)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

On pourra utiliser le binôme de Newton avec deux matrices bien choisies.

Exercice 11 (**)

Calculer A^k pour $k \in \mathbf{N}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 (**)

Soit $n \geq 2$ un nombre entier,

On pose $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a \neq b$ et $a \neq (1-n)b$.

On définit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & b & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour $p \in \mathbf{N}$, calculer A^p .

2. (a) Calculer

$$A^2 - (2a + (n-2)b)A + (a-b)(a + (n-1)b)I_n.$$

- (b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 13 (***)

Soit A une matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $A^n = 0$.

On pourra commencer par des exemples en petite dimension

4 MATRICES INVERSIBLES

Exercice 14 (** cours)

1. Si $AB = 0$, peut-on avoir A et B non nulles ?
Prouver.
2. Si $AB = 0$, peut-on avoir A ou B inversible ?
3. Si $AB = I_n$, que peut-on dire de l'inversibilité de A et/ou B ?
4. Si $AB \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ que peut-on dire de l'inversibilité de A et/ou B ?

Exercice 15 (*)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3 .
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 16 (*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer $A^3 - A$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 17 (*)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$.

1. Trouver une relation linéaire entre A^2 , A et I_2 .
2. En déduire une condition suffisante pour que A soit inversible; donner alors l'expression de A^{-1} .

5 PIVOT DE GAUSS

Exercice 18 (*)

Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ comme produit de matrices de transvections, dilatations, permutations.

Exercice 19 (*)

À l'aide d'opérations sur les lignes, donner la forme échelonnée réduite des matrices suivantes, en déduire leur rang.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20 (*)

Calculer l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 21 (**)

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ quatre nombres complexes. On considère le système linéaire

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + 3y + 4z + 7t = \lambda_1 \\ x + y + z + t = \lambda_2 \\ x + 3y + 3z + 2t = \lambda_3 \\ x + 3y + 4z + 5t = \lambda_4 \end{cases}.$$

Résoudre le système et en déduire l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22 (**)

Justifier que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (-1) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$$

est inversible et déterminer A^{-1} .

Indication ²

Exercice 23 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, montrer que

$$A \in \text{GL}_n(\mathbf{K}) \iff (\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), AB = 0 \Rightarrow B = 0).$$

6 SYNTHÈSE

Exercice 24 (*)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3 .
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3. (**méthode**)
Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe $(\alpha_p, \beta_p) \in \mathbf{R}^2$ tel que $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_3$.
Déterminer une relation de récurrence qui lie les suites $(\alpha_p)_{p \in \mathbf{N}}$ et $(\beta_p)_{p \in \mathbf{N}}$ ainsi obtenues.
4. Déterminer α_p et β_p en fonction de $p \in \mathbf{N}$.
En déduire l'expression de A^p .

On pourra faire de même pour trouver A^p pour $p \leq -1$.

² 2. Résoudre le système.

Exercice 25 (méthode)**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$ et vérifier que la matrice est diagonale.
3. Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1} ,
En déduire A^n en fonction de P, P^{-1} et des puissances de D .
4. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 26 ()**

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. La matrice A est-elle inversible ? si oui, donner son inverse.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 27 ()**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices symétriques.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que le produit AB soit encore symétrique.
2. Les puissances successives de A sont-elles symétriques ?
3. Si A est inversible, A^{-1} est-elle symétrique ?

Exercice 28 ()**

1. Montrer que s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^p = 0$, alors A n'est pas inversible.
2. Montrer que s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $(A + I)^p = 0$, alors A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 29 (*)**

Idem à l'exercice 28 mais vu autrement.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Soit $q \in \mathbf{R}$, simplifier l'expression $(1 - q) \sum_{k=0}^p q^k$.
2. On suppose que A est une matrice nilpotente : c'est-à-dire qu'il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que $A^r = 0$.
Montrer que $(I_n - A)$ est inversible et exprimer son inverse en fonction des puissances de A .